Johannis Wallisii S S. Th. D.
Geometriæ Professoris *Saviliani* Oxoniæ,

TRACTATUS DUO.

Prior,

DE CYCLOIDE

Et corporibus inde genitis.

Posterior, EPISTOLARIS;
In qua agitur,

DE CISSOIDE,

Et Corporibus inde genitis:

ET

DE CURVARUM,

Tum Linearum εὐθύνσει, tum Superficierum Πλατυσμῷ.



OXONIÆ.
Typis Academicis *Lichfieldianis*. Anno Dom.
clↄ Iↄc LIX.

Honoratissimo Doctissimoque Domino,

D. ROBERTO BOYLE

ARMIGERO,

Tum illustri Familia, Tum magnis Virtutibus Nobili.



UUM, Scientiam nullos habituram inimicos, præter ignorantes, jam olim sit scitissimum: Nemo, *credo, aut inique aut imprudenter à me factum existimabit, quod Scientissimum Virum opusculo huic nostro patronum advocaverim. Qui præter tuam in Theologicis tum cognitionem tum praxin, atque in Linguis, tum sacris, antiquisque, tum modernis etiam peritiam; in Politicis item, & negotiis publicis, & rerum & personarum, domi peregreque, intimam notitiam,*

Qui mores hominum multorum nôris & urbes:

In Physicis etiam, & veræ Philosophiæ venatione, ita perpetuis & subtilissimis Experimentis, *Medicis, Chymicis, Anatomicis, aliisque omne genus,* Naturam *quasi ferro & igne prosequeris, (nedum per omnes subtiliorum in quacunque arte Opificum officinas,) in secretos abditissimosque sequeris recessus, & quasi in viscera penetras; ut mirum ni tibi tandem se in prædam dedat. Quique* Naturam, *tanquam equuleo impositam, severâ saltem, ne crudeli dicam, quæstione, torquendo vexas & retorquendo, quò verum tandem fassa secreta pandat omnia: idem, in Mathesi,*

Æquationes Analyticas (Equuleum *Mathematicum*) *versas; quo vix subtilius aliud instrumentum abdita perquirendi, aut extricandi involuta.*

Quamquam enim tam perspicacis ingenii Virum, atque subacti judicii, reformidare debere videar, qui de nostris sententiam ferat; ut qu , vel leviora παροράματα *aut* ἀκυρείας, *vel* ἀμεθοδίας *etiam, siqua deviatum est, potis es dignoscere: Tu tamen, qui cætera nôris, noris etiam quam in festino scripto multa sint condonanda, quamque omnino arduum sit, omnem unguis critici scalpturam devitare.*

Invenies autem, ex subtilissimis præsentis seculi inventis, si non omnia, præcipua saltem, vel ex professò tradita, vel obiter insinuata: Eaque, utut non nova omnia, aut nulli hactenus reperta, at novis saltem demonstrationibus ornata, & methodis nostris accommodata. Et quidem ab aliis nonnulla per longiores ambages & particulatim inventa, mirabere forsan tam facile ex principiis nostris, & universaliter traditis, simplicius & sponte fluere.

Tu vero, ut soles, & doctis favere pergas, & studia promovere: nec averseris interim,

VIR NOBILISSIME,

Tui observantissimum
& amantissimum,

JOHANNEM WALLIS.



PRÆFATIO.



VO, quid in sequentibus agatur, rectius persentiscat Lector, quaque ansâ datâ hæc fuerim meditatus; præviam hanc totius rei gestæ, quatenus ea me spectet, narrationem præmittere visum erat, quæque ad id operis me impulerunt causas breviter aperire. Cum Illustrissimi Equitis Digbæi *literis (Julii 17, 1658, Parisiis datis) duas simul inclusas chartulas, pridie Cal. Augusti, stylo nostro, hoc est Aug.* 10. *stylo novo, Oxoniis accepi. Quarum prior, hæc continebat Problemata; (Parisiis, quod audio, mense Junio primum divulgata.)*

Dato, in Cycloide quacunque ABCD fig. 1. quolibet puncto Z, ex quo ducta ZY recta, basi AD parallela, axem CF in puncto Y secet: Quæruntur;

Dimensio spatii CZY; Ejusque centrum gravitatis:

Solidaque ex ejusdem CZY conversione, tum circa ZY, tum circa C Y, genita; & horum Solidorum Centra gravitatis.

Quod si eadem solida, tum quod circa Z Y, tum quod circa C Y, plano per axem bifariam secentur: Horum item semisolidorum quæruntur centra gravitatis.

Quorum quidem Problematum solutionem, à præstantissimis toto orbe Geometris, supplex postulat *Anonymus*, *proposito simul* præmio *in hac verba*, Quisquis superius proposita, intra primam diem mensis Octobris anni 1658 solverit & demonstraverit, magnus erit nobis Apollo. Et primus quidem consequetur valorem quadraginta duplorum aureorum Hispanicorum, quos ipsi Hispani *Dublones*, & Galli *Pistolles* vocant: Secundus

vero

vero viginti ejusmodi duplos aureos : Si unus tantum solverit, sexaginta solus habebit.

Charta posterior, indicat; Per [Cycloidem quamcunque] non aliam ab ipso intelligi, quam Cycloidem primariam à Toricellio descriptam ; cujus nempe Basis perimetro circuli generantis æquatur; *Seque* rationem quam habet Basis Cyloidis ad altitudinem, sive ad diametrum circuli generantis, pro data reputare: *Remittit denique nonnihil de propositionum præcedentium rigore, nempe* multorum casuum calculum, & absolutam solutionum conscriptionem ; *Adeoque his tandem verbis conditiones suas exponit*, Qui publico Instrumento, intra præstitutum tempus, Illustrissimo D: de Carcavi significaverit, eorum quæ quæsita sunt demonstrationem penes se habere ; & aut ipsammet demonstrationem quantumvis compendiosam ad ipsum miserit ; aut si chartæ mandare nondum per otium licuerit, saltem ad confirmandam suæ assertionis veritatem, casus quem mox designabimus calculum dederit ; seque paratum esse professus fuerit omnia omnino demonstrare ad ipsius D. de Carcavi nutum, hunc nobis satisfecisse declaramus : Et consentimus, primum qui hæc fecerit primo, secundum secundo, præmio donandum, si sua solutio ab ipso D. de Carcavi virisque ad id secum adhibitis, cum ipsi visum fuerit, exhibita, geometrica ac vera judicetur : Salvo semper erroris calculo, (*lege*, errore calculi.) Casus autem cujus solius sufficiet calculus ille est. Si semicyclois ACF circa basim AF convertatur, & solidum inde genitum secetur plano per ipsam AF (quæ jam hujus solidi axis est) ducto, quod quidem solidum dividet in duo semisolida paria. Alterius horum semisolidorum centrum gravitatis assignari postulamus.

His acceptis literis cum inde perspexerim Illustrissimo Equiti in votis esse, ut ego huic me inquisitioni accingerem ; id statim feci, non tam exposito præmio (quod quidem ad pompam facere visum est) quam Illustrissimi Equitis desiderio inductus. Videbam autem non parum temporis propositi (mediam saltem partem) jam effluxisse : Et quidem (quod intellexi postea) non exiguum etiam à calce amputandum erat ; quantum saltem exscribendis, transmittendis & tradendis literis sufficiat: (Quod enim in chartâ primâ dictum est, qui intra primam diem Octobris solverit & demonstraverit ; *id in secunda sonat*, qui publico Instrumento, intra

præstitutum

præstitutum tempus D. Carcavio significaverit; *quod tandem exponunt Pascalii ad Wrennum literæ*, si intra dictum tempus Carcavius id acceperit.) *In angustias itaque temporis conjectus eram; (& quantas quidem tam perplexæ disquisitioni vix sufficere vel author ipse judicabit;) Præsertim cum rudis ego ad id operis accesserim, quod ipsum, & Gallos suos, jam per viginti annos & ultra, nedum quadraginta, exercuit: (neque enim ego de Cycloide quidpiã ante meditatus erã quam his Problematis fuerim excitatus.) Quod itaque temporis angustiæ postulabant, nec abnuebant oblatæ conditiones, rem ego summatim aperiendam duxi: adeoque literis Aug.* 19. *Oxonii datis, paragraphis* 55, (*eisdem fere verbis cum totidem tractatûs insequentis primoribus,*) *ad* D. *Carcavium amandabam; quibus totius methodi summa continetur: reservatâ mihi, quam & oblatæ conditiones patiuntur, libertate, lapsus (si qui forte fuerint) emendandi. (Non enim tam ipsum calculum quam calculi methodum tum exponere satagebam.) Et quoniam* Instrumenti publici *mentionem factam videram, quamquam quid illæ voces ibidem innuebant non satis perspiciebam, ne tamen & hac ex parte quidquam deficeret,* Notarii publici *subscriptione rem confirmandam curabam.*

Has meas literas, ad D. Carcavium 10 *Septemb. pervenisse intelligo; vel saltem (eo absente) ad ipsum Pascalium: qui tum ea Problemata, quod jam intelligimus, Anonymus proposuerat, tum* D. *Carcavio permittente aliorum scripta literasque ad eum ea de re datas accepit & perlustravit, id enim in suis ad D. Wren literis* 13 *Sept. datis innuit, his verbis.* Absentia communis amici nostri D. de Carcavi qui tuas ad me misit Epistolas, causa est cur non ille sed ego quamvis ignotus audeam respondere. *Et tandem (post alia multa)* Unum tibi, *inquit,* dicere habeo, scilicet hic receptas esse ab eximio ex vestris geometra epistolas in quibus omnium quæ de Cycloide problematum sunt proposita solutionem tradit. Et ipsi suum ordinem religiose servandum ab illa die scilicet quo recepta fuerunt, nempe a decimo die hujus mensis stilo novo. Sic enim habetur intentio Anonymi proponentis, ut qua die D. de Carcavi excipit solutionem alicujus eo die ordo ejus sumatur. Et quidem conformius fuisset Anonymi ipsius intentioni ut per Notarios Parisienses attestatio facta fuisset quam per Oxonienses. Parisienses enim fidem facerent

receptionis D. de Carcavi, unde ordo sumitur; Oxonienses vero nihil ad hoc facere possunt. (*Tantâ siquidem solennitate res transigenda erat!*) *Quasi quidem nesciverit Carcavius, sine Notariorum plurium Publicorum testimonio, se accepisse; vel etiam quo die acceperit.*) *Ne autem istæc non satis intelligantur; Ad ea verba impressa chartulæ posterioris,* Qui publico instrumento ante præstitutum tempus, Illustrissimo D. de Carcavi significaverit; *hanc adscriptam transmisit notam marginalem*, id est, per Notarios Parisienses, per extraneos enim nihil significari potest D. de Carcavi: Et in hoc est aliquantulum plus gratiæ in Gallos, quam in alios Geometras; sic autem voluit Anonymus, suæ legis dominus: Itaque quicquid ante Calendas Octob. ad D. de Carcavi mittetur ordinem obtinebit, quod autem postea, non recipietur quamvis probaretur actum fuisse ante Calendas Octobris: significatio enim facta ad D. de Carcavi, seu ejus receptio, sola valet ad ordinem præmii. Et siquis è regione magis remota jam mittat solutionem actam ante 29 Augusti (qua die acta est solutio vestri dicti Geometræ;) ipsa quamvis prior, posterior habebitur, utpote posterius recepta. *Atque hæc sunt quæ ad* D. Wren *de me scripserat. De quibus mihi nihil quicquam contra disputare in animo est. Ad præmium enim quod attinet, de quo videtur ille admodum solicitus, id me omnium minime solicitum tenet, Rem ipsam quod spectat: Geometrarum illud judicio permittendū est. De Instrumento publico quod dicitur: putarim quidem ego, vel eo hoc opus esse ut D. Carcavio fidem faceret, quo tempore solutio qualibet alibi facta fuerit; vel non omnino opus esse: ut enim sibi se accepisse constet, vel quo die acceperit, quid Instrumento publico vel publicis notariis opus esset non videbam. Sed affigat quam velit mentem suis verbis, & de præmio quod lubet statuat, non repugno; Gallisque suis præ aliis favorem quem velit largiatur. Facti siquidem ego rem refero, non de jure litigaturus.*

Interea vero temporis, literis secundis 3 Septemb. datis, minutiora quædam in literis præcedentibus contenta, partim explicabam partim immutabam (reservata tamen qua prius libertate,) adeoque in eundem plane statum quo jam habentur redigebam: Nisi quod, etiam tum, non satis attentus, § 30 falso s adhuc numeros apposueram; (& similiter § 45.) Illis utique numeris investigandis, trilineum

lineum C z F A *fig.* 1. *hoc est* C F A *fig.* 7. (*qui facilis lapsus est*) *circa rectam* A F *converteram*, *quod circa* C F *convertendum erat*, (*ut* § 77, *ubi calculus instituitur, videre est*,) *nempe ut habeatur. aggregatum omnium* F Y, *sive* ζ Z *fig.* 7. *in* Z z *Arithmetice proportionales ductarum*. *Quam quidem oscitantiam ubi animadverterem* (*quodque unicum in jam traditis emendavimus*) *ultimis tandem literis*, *eodem mense datis insinuabam*: superesse, *nempe*, in prioribus nonnihil immutandum, quod & ipsis, ni nondum ad examen redegerint, perspectum esse possit: cum autem ipsis adhuc plura videri forte possint supplenda, ad justam eorum demonstrationem quæ vel strictim insinuaverim, vel ut pro concessis habuerim, expectaturum me *dicebam*, donec quid ipsis videretur intelligerem, ut eadem operâ immutarem, immutanda, supplenda supplerem, & supremam adjicerem manum. *Atque hæc quidem ego ipsorum conditionibus conformia esse duxi*, (*qui nonnisi* demonstrationem quantumvis compendiosam *peterent*, *vel ne hanc quidem, modo numeros uni casui accommodos quis exhiberet*,) *idque* salvo semper errore calculi: *modo saltem* (*quod in literis ad* D. *Wren additum est*) *parati simus reliqua exhibere ubi fuerimus à* D. *Carcavio ad hoc moniti*.

Lapsus autem ille quis fuerit quem emendaturus eram, *speciatim literis illis non indicabam*; *quia jam mihi subolebat lupus in fabula. Conjiciebam enim ex literis ad* D. *Wren scriptis*, (*me enim nullis hactenus dignati sunt*,) *Paschalium hunc cui* D. *Carcavius literas accipiendi, perlustrandi*, *eisque respondendi copiam fecisse diceretur*, (*fortasse & sententiam ferendi num conditionibus satisfiat*,) *eundem esse qui hæc problemata Anonymus proposuerat. Cui cur ego mea ulterius aperirem non videbam. Accedebat, quod jam edoctus fueram, quocunque tempore quidpiam alibi factum fuisse constet, nisi id Parisiis ante indictum diem Carcavio tradatur*, (*quocunque id fato fiat*,) *non admittendum fore*; *adeoque cum non sperandum videbatur ut quicquid ego tum scriberem* (*exeunte Septembri*) *ante primum diem Octobris eo accederet*; *id saltem insinuare visum est*, *tum deprehendisse me errorem illum calculi*, *tum paratum esse vel illum emendare, vel etiam, quæ ultra desiderentur, ad eorum nutum supplere*.

Cum verò ego per aliquot menses, *ut monitus eram*, (*sive* D *Carcavii*, *sive potius*) *Pascalii nutus expectaveram*, *quid ultra postularent*,

larent, aut quid suppletum adhuc vellent; nec quicquam literarum acceperim, (licet literas meas ternas ad D. *Pascalium rite fuisse traditas aliunde intelligam;) Tandem prodiit, quasi rei gestæ Narratio,* Histoire de la Roulette; *quam exeunte mense Novembri primum vidi. In qua, ut de solutionibus à me exhibitis (quod & de aliorum item evenisse conjicio) altum fuit silentium; tamen etiam adhuc exspectandum insinuatum erat dum alii nescio qui à* D. *Carcavio ad id designati (siqui saltem designati) judicium tulerint de scriptis sive nostris, sive & aliorum, quorum etiam nomina reticere voluit.*

Innuit quidem hæc historiola, Considerationem Cycloidis, Mersenno proponente, jam ab anno 1615 *(dum ego nondum natus eram) Gallos exercuisse; Robervallium, vero anno* 1634 *demonstrasse primum,* Figuram Cycloidalem circuli genitoris triplam esse: *quod & post illum demonstrasse dicuntur Fermatius & Cartesius, sed quorum demonstrationes, præ illa Robervallii, extenuatum itur. (Eorum vero nemo, quod sciam, demonstrationem suam typis vulgari hactenus curavit.) Torricellius deinde, qui anno* 1644, *harum rerum nescius, vulgavit suas (omnium, credo, primus,) insimulatur plagii; (quam juste, nedum candide, non inquiro; postquam per complures annos sit demortuus;) non quod Robervallii demonstrationem pro sua venditaverit, sed quod (sic utique suspicantur) inter Gallilæi schediasmata vidisse forte potuerit propositionis istius demonstrationem à* D. *Beaugrand ad Galilæum olim transmissam.* Cui *simile quid de Lalouerâ Jesuitâ videntur suspicari, qui eorum nonnulla protulerat quæ sibi peculiaria putaverit Robervallius. Fortassis etiam & nos ejusdem insimulandi, ubi viderit eadem & à nobis inveniri.* Inveniri, *inquam; non enim si se prius hæc scivisse contendat, utut id verum esse possit, nos ideo minus invenisse dicendi sumus, dummodo clam nobis sit quod ipse fecerit; qui nec uel scrinia sua vel scripta compilavimus, nec ab illo quidquam fuimus edocti. Didiceram quidem à Toricellio,* (à Toricellio, *inquam, nam Robervallium de rebus hisce quidpiam meditatum esse, quæ mea erat infelicitas, ne per somnia cogitabam;) didiceram, inquam, ab illo, tum Cycloidis aream circuli triplam esse; tum Tangentes describendi methodum: Plura vero de* Cycloide, *quempiam excogitasse, nesciebam plane; ut & (quantum hactenus intelligo) nostri juxta mecum ignorabant omnes: Nec quidem ullo jure censendi sumus cognovisse; cum illud omne quod se invenisse*

inveniſſe contendit, vel intra privata ſua ſcrinia recondidit, vel familiaribus ſaltem aliquot communicavit, in publicum certe (quantum mihi hactenus aſſequi licuit) nondum edidit.

Pergit deinde eadem hiſtoriola ediſſerere, quid Robervallius, quid author ipſe invenerit. (Se ſolos autem eadem inveniſſe, non dicent, credo.) Quid autem invenerint alii, ſubticuiſſe mirandum non eſt, cum palam profiteatur peculiarem ſe Gallis ſuis favorem exhibere voluiſſe. Non diffitetur interim Hugenium Batavum, & Wrennium noſtrum prodidiſſe, Portionem Cycloidis quam abſcindit recta ad axim ordinatim applicata, ejuſdem axis partem quartam vertici proximam abſcindens, æqualem eſſe ſpatio rectilineo: (*Quod quidem verum eſt; æquat utique* $\frac{3}{8} R^2 \sqrt{3}$: *ut ex calculo* § 23 *liquet; uti & trilineum* C b B *fig.* 1. *vel* 7, *æquare* R^2 *quadratum radii; Et priſmatis oblique ſecti portionem, ſive momentum ejuſdem* C b B *trilinei reſpectu* c B, *æquare* R^3 *cubum radii; item ejuſmodi portionem, ſive momentum trilinei* B F C, *ſive reſpectu* c β, *ſive reſpectu* β F, *æquare* $2 R^3$, *duos cubos radii circuli generantis: quæ nos in ſequentibus demonſtravimus:*) *Eundemque Wrennium noſtrum* Cycloidis curvæ, ejuſque partibus, æquales rectas inveniſſe. *Atque hinc denique anſam deſumit novas proponendi quæſtiones*, De centro gravitatis tum lineæ curvæ cycloidis, tum partium ejuſdem deque ſuperficiebus ejuſdem curvæ tum converſione tum ſemiconverſione, tam circa baſim, quam circa axim, deſcriptis, & harum ſuperficierum centro gravitatis. *Nos autem (nullius nominis in narratione ſua) quid præſtitimus, patebit in ſequentibus.*

Exſpectandum autem aliquandiu videbatur (prout ſuperius inſinuatum diximus) numquid aliquando nobis injunctum foret à Carcavio ad demonſtrationes noſtras ſummatim traditas pro libitu ſuo perficiendas. Atque interea quæſtiones de novo propoſitas ſolvebam, (quod quidem poſt ſolutas præcedentes non erat factu difficile.) Tandem vero, cum nihil prorſus acceperim, nec noverim quid ageretur; quæ ad ſolutiones meas quà priores, quà poſteriores, elucidandas, viſa ſunt neceſſaria, (quæ nempe poſt § 55 *inſequuntur,) ſcholiorum inſtar ſubjunxi, eaque prout nunc ſunt ad* D. *Vicecomitem Brounker Menſe Martio tranſmiſi: neque ex eo tempore quicquam innovandum putavi.*

Rem autem ipſam quod attinet; Id animo propoſitum habui, quam

ſuccincte

succincte omnia, sed & perspicue proponere: Non tamen quæ subinde occurrunt Lemmata singula seorsum semper demonstrare, (id enim si fecissem, nimis increvisset operis moles,) sed ea saltem quæ videbantur obscuriora; reliquorum fontes vel digito indicasse satis esse ratus. Sed & eadem non raro, variis in locis, variis etiam modis demonstrata reperiantur. Nec eandem semper demonstrandi methodum secutus sum sed nunc ad morem veterum, nunc ex Geometria Indivisibilium, nunc etiam & ex Infinitorum Arithmetica nostra petitis demonstrationibus. Non quidem quod illud necesse habui; sed quoniam id Lectori, & magis utile, nec minus gratum fore credidi, quam eandem sæpe cramben recoquere. Quod moneo, ne miretur forsan aliquis si in se quidem similia, dissimili nonnunquam demonstrandi methodo probata videat. Non raro etiam à minutioribus nonnullis demonstrandis consulto abstinui; nec ad singulos forsan casus possibiles ubique descendi; satis id ratus, si viam demonstrandi palam ostenderim, singulos interim apices (si illud ἐργοδιῶνται postulent) paratus exhibere.

Atque hæc sunt quæ Lectorem præmonendum putabam. Quæ quidem paulò fusius exposui, ut, qui supra memoratas chartas non viderint, earum saltem summam, adeoque rei gestæ narrationem, hinc intelligant; & causam simul cur hac methodo mea disponatur, quæ secus aliâ forsan methodo rectius disponenda esse, si res esset integra, existimare possent.

DE



DE CYCLOIDE ET CORPORIBUS Inde genitis, Problematum Solutio.

Pars Prior.

§ 1. Anifestum est, in constructione Cycloidis, Peripheriam Circuli generantis, propter continuam sui quæ supponitur ad rectam D A (fig. 1.) applicationem, huic æqualem esse: Adeoque & semissem semissi, &c. *Recta Z Y.* Fig. 1.

2. Et quidem, particulatim, dum Circulus Genitor, basin in ζ contingens, puncto suo lineante designat Cycloidis punctum Z, manifestum est (propter eandem continuam ἐφαρμογήν) rectam ζ A congruere curvæ ζ Z, hoc est (ducta Z z basi parallelâ, quæ occurrat in z circulo C z F circa Cycloidis axem) curvæ F z: Adeoque & reli-

quam reliquæ: nempe ζ F, hoc est Z z, ipsi z C. Et sic ubique.

3. Recta igitur Z Y æquat ubique aggregatum Arcûs & Sinûs recti, Sinui verso C Y convenientium.

Semicyclois. 4. Si uper circulo C z F circa Cycloidis Axem constituto, aut huic æquali, erigatur Cylindrus rectus F z C Γ, (fig.2.) altitudinem habens C Γ, diametro Basis æqualem: Tota superficies hujus Cylindri (cum basibus) est dupla Cycloidis A C D F; (nempe duæ bases Cylindri fig. 2. sunt duplæ circuli C z F fig. 1. & Cylindrica superficies curva, dupla reliquorum segmentorum:) Atque si eadem superficies (*superficies*, inquam; non Cylindrus, ne novæ superficies secando emergant) plano F C Γ per axem bisecetur: Semisuperficies Cylindri erit dupla Semicycloidis A F C; (nempe duæ semibases, sunt duplæ semicirculi C z F fig. 1; & Semicylindrica superficies curva, dupla trilinei C A F z:) Et denique si ea semisuperficies bisecetur adhuc plano elliptico F ζ Γ υ quod plano F C Γ rectum sit; semisuperficiei illius semissis Γ ζ F z C Y F æquabit semicycloidem C A F; (nempe Semicirculus basis C z F fig. 2. æquabit semicirculum C z F fig. 1. & superficies curva Γ ζ F z C Γ æquabit trilineum C A F z.)

Fig.2.

5. Nam, sumpto ubivis in Cycloidis axe puncto Y, unde parallela basi ducatur Y z Z: rectæ C Y in axe Cycloidis sumatur C Y æqualis in diametro basis Cylindricæ, unde ducatur Y υ lateri C Γ parallela, diagonali F Γ occurrens in υ; & per punctum υ, plano basi F z C parallelo, puta υ ζ c, secetur superficies cylindrica sectionem exhibens ζ c arcum circuli, quæ (propter parallelas) congruet arcui z C in base Cylindri, hoc est arcui z C circuli genitoris, adeoq; z Z rectæ æqualis, (sicut & υ ζ congruit rectæ Y z sive in base cylindri sive in circulo generante.) Quod cum ubique fiat, erunt omnes curvæ in superficie cylindrica Γ ζ F z C Γ, ipsi ζ c parallelæ, æquales rectis omnibus ipsi z Z parallelis in trilineo cycloidis C A F z, & singulæ singulis, & similiter positæ (in iisdem puta sive à base sive à vertice distantiis:) Adeoque, propter æqualem etiam utriusque figuræ altitudinem, figura figuræ æqualis: superficies cylindrica, plano trilineo; (sed & segmenta illius respectivis segmentis hujus, ut patet:) Et si addantur utrobique æquales semicirculi C z F,

erit

erit aggregatum aggregato æquale, & duplum duplo, quadruplum quadruplo, &c. Hoc est, superficies Γ ζ F z C Y F, Semicycloidi A C F; & Semisuperficies Cylindri (quippe istius dupla) Cycloidi A C D F; & tota superficies hujus dupla. Quod erat propositum.

6. Est igitur Cyclois A C D F, circuli genitoris tripla. Quod sic colligitur. Cylindri integri modo expositi superficies curva, æquatur facto ex altitudine (quæ æqualis est diametro Basis) in basis circumferentiam; adeoque est quadrupla circuli basis: Cui si basis utraque adjiciatur, aggregatum erit, baseos (hoc est circuli genitoris) sextuplum. Est autem, ut supra ostensum est, duplum Cycloidis: Ergo Cyclois ipsa est circuli Genitoris Tripla. Nempe Trilineum C A F z Semicirculi C z F duplum. *Cyclois Circuli tripla.*

7. Porro, si exposita quæ prius superficies (nempe semisuperficiei cylindricæ semissis) Γ ζ F z C Y F, secetur adhuc plano z γ Y, quod sit plano elliptico F ζ Γ υ parallelum: Superficies abscissa γ z C Y z, æquabit segmentum Cycloidis C Y Z. Nam, propter Cylindricæ superficiei sectiones parallelas, congruet γ z C ipsi Γ ζ c, hoc est trilineo C z Z Cycloidis; sed & C Y z utrobique æqualis; Ergo aggregatum aggregato æquale. *Segmentum C Y Z.*

8. Si super Cycloide A C D erigatur (ut in fig. 3.) semicylindrus rectus, sive Prisma, (utrovis enim nomine dicatur perinde est) altitudinem habens C Φ duplam rectæ A D; quod per axem secet F C Φ sectionem in latere faciens C Φ rectam; cui plano intelligatur planum aliud recte insistens, per rectam F Φ transiens, solidum abscindere D A Φ C D: Huic solido æquatur solidum factum ex conversione Cycloidis A C D circa rectam A D. Cum enim sit A D æqualis peripheriæ diametri F C; erit ipsius dupla C Φ, æqualis peripheriæ semidiametri F C; adeoque (propter angulum F C Φ rectum) triangulum F C Φ æquatur circulo ex conversione radii F C facto. Et similiter ostendetur triangulum X Z ξ æquale circulo radii X Z: Et sic ubique. Ergo omnia triangula omnibus circulis, adeoque solidum solido æquatur, & segmenta segmentis respectivè sumptis: Puta, solidum X Z ξ A, solido ex conversione plani X Z A facto; & sic ubique: Item prisma X Z ξ υ Y F solido ex conversione parallelogrammi X Z Y F; adeoque & solidum Z Y C Φ υ ξ solido cylindrico *Solidũ axis A D.* *Fig. 3.*

 lindrico

lindrice excavato conversione plani Z Y C circa rectam A F facto. Sin adhuc secetur plano ξ υ κ basi parallelo, segmentum Φ ξ υ κ æquabitur solido ex conversione plani Z Y C circa rectam Z Y facto. Nam & hic eodem modo ostendetur, triangulum υ κ Φ æquale circulo radii υ κ; & de reliquis similiter.

Solidū axis F C. 9. Similiter, si super semicycloide A F C fig. 4. erigatur Prisma, sive Cylindri recti quadrans, altitudinem habens A V, quæ sit ad A F, ut 4 A F ad F C; (nempe ut circuli Perimeter ad Radium;) secetur autem plano F C V: Solido F V C Z A æquatur solidum ex conversione plani F C Z A circa rectam F C; & segmenta segmentis respective sumptis; puta segmentum Y Z Ψ C segmento conversione plani Z C Y facto. Nam & hic triangulum F A V æquatur circulo radii F A; & triangulum Y Z Ψ circulo radii Y Z: Et sic ubique.

Fig. 4.

10. Atque hactenus quidem utut tum planorum tum solidorum omnium expositorum dimensionem aliquatenus hac methodo tradidisse videamur: Cum tamen de Gravitatis Centris nihil hinc constet, libet in sequentibus, resumpto iterum toto negotio, rem aliter expedire, hoc modo.

Angulus Z ζ A. 11. Ut supra ostendimus rectam z Z fig. 1. æqualem arcui z C: ita ostendetur, angulum Z ζ A, hoc est z F A, arcui Z ζ sive z F, hoc est rectæ A ζ, proportionalem esse: (nempe, ut arcus F z, hoc est A ζ recta, ad arcum F z C, hoc est rectam A F, sic esse angulum Z ζ A vel z F A, ad C F A rectum:) propter angulum z G F anguli z F A ubique duplum, & propterea utrumq; arcui F z ubique proportionalem.

Fig. 1.

12. Adeoque, divisâ recta A F in partes quotlibet æquales, in punctis λ, μ, β, ζ, &c. ductisque rectis λ L, μ M, β B, ζ Z, &c. à puncto contactûs ad punctum lineans, (quibus parallelæ existunt in circulo F l, F m, F b, F z, &c.) anguli L λ A, M μ A, B β A, Z ζ A, &c. sunt Arithmetice proportionales; quorum continuus excessus primo æqualis est, nempe angulo L λ A.

13. Ductis itaque tum in Cycloide rectis λ L, μ M, β B, ζ Z, &c. tum ipsis respondentibus in circulo F l, F m, F b, F z, &c. distribuentur Semicyclois & Semicirculus in segmenta numero æqualia; singula singulis (respective) correspondentia.

14. Ductis item in Cycloide, a punctis ν, ζ, β, &c. rectis ν ϖ, ζ ϱ, β σ, &c. quæ parallelæ sint rectis ζ Z, β B, μ M, &c.

Erunt

Erunt anguli omnes $N \nu \varpi$, $Z \zeta \varrho$, $B \beta \sigma$, &c. æquales tum inter se, tum angulo $L \lambda A$, tum etiam cuilibet angulorum A F l, l F m, m F b, &c. qui item (propter æquales arcus F l, l m, m b, &c.) sunt inter se æquales.

15. Ductis porro tum in Cycloide rectis N O, Z P, B R, &c. tum in circulo n O, z p, b r; &c. inscribatur tum Cycloidi figura ex Trapeziis, tum circulo figura ex Triangulis correspondentibus constans.

16. Erunt autem illa Trapezia, Triangulorum horum respective sumptorum, ubique plusquam tripla. Constat enim quodlibet Trapeziorum, ex Triangulo simul & Parallelogrammo: quorum illud, triangulo correspondenti in circulo (ut ex dictis facile colligitur) ubique æquale est; hoc illius (ut jam ostendetur) plusquam duplum.

17. Nam, verbi gratia, in Trapezio $O N \nu F$, Triangulum O n F est utrique figuræ commune; & Parallelogrammum $N n F \nu$ (æquialtum) plusquam duplum Trianguli, propter rectam N n, hoc est curvam n C, majorem n O rectâ.

18. Sin aliud sumatur Trapezium, puta $P Z \zeta \nu$; Erit inibi Triangulum $P \nu \varpi$, triangulo p F z æquale; & Parallelogrammum $Z \zeta \nu \pi$ plusquam duplum, propter rectam $Z \pi$, hoc est, $\zeta \nu$, hoc est curvam z n, majorem quam z p, vel πP. Nam si aptetur chorda z n; erit angulus p F Y (propter tum semiperipheriam C z F, tum angulum rectum C F A, in sex partes æquales divisum) $\frac{1}{6}$ anguli recti; adeoque angulus Y p F, hoc est z p n, $\frac{5}{6}$ recti; cui si addatur angulus n z p, qui est $\frac{3}{6}$ recti, (subtendit utique duplo arcûs z C, minus z n;) aggregatum $\frac{8}{6}$ recti ex 2 rectis subductum, relinquet angulum z n p, $\frac{4}{6}$ recti. Major itaque est angulus z p n angulo z n p, (nempe ut 5 ad 4,) adeoque latus oppositum z n recta, major quam z p; ideoque à fortiori, z n curva, hoc est recta $Z \pi$, multo major erit quam recta z p, hoc est πP. Et similiter ostendetur (inscriptâ chordâ b z) angulum b r z majorem esse angulo b z r, (nempe ut 4 ad 3,) & sic alibi. Nempe, universaliter, si ponamus arcum semicirculi C F, adeoque angulum rectum C F A, dividi in partes æquales numero s; quarum arcus z C, adeoque & angulus z F C, contineat partes numero n, (adeoque angulus p F C partes $n-1$, & propterea angulus Y p F, hoc est z p n, partes

$s - n + 1$;) erit angulus n z p partium $2n - 1$; qui si addatur angulo z p n, & utriusque aggregatum $s + n$ ex duobus rectis, hoc est ex $2s$, auferatur; manebit angulus z n p partium $s - n$, minor angulo z p n partium $s - n + 1$.

19. Sin istiusmodi figuræ tum Cycloidi tum Circulo circumscribantur; erunt singula Cycloidis Trapezia, respectivorum Circuli Triangulorum, minus quam tripla. Triangula siquidem

Fig. 1. erunt in utraque figura æqualia; Parallelogramma minus quam dupla Triangulorum; cum æque alta sint, sed super minore base.

20. Nam, verbi gratia, In Trapezio C Q ν F, recta Q q, hoc est ν F recta, hoc est arcus n C, minor est tangente q C. Utut enim secans F q, non à centro G, sed ab opposito diametri termino F ducatur, adeoque minor sit q C quam Tangens vulgo dicta quæ rectæ à G centor per arcus terminum n transeunti occurrat; est tamen ipso arcu n C major; Nam si intelligatur à centro G duci recta rectæ F q parallela; bisecabit illa tum arcum n C, tum rectam q C; adeoque erit q C æqualis duabus Tangentibus Semiarcûs, quas simul ipso arcu majores esse constat.

21. Atque eodem fere modo ostendetur, n τ, hoc est N t, majorem esse quam est n z curva, hoc est recta T t; item z υ, hoc est Z u, majorem quam z b curva, hoc est recta V u; & in reliquis pariter. Et quidem quo longius à puncto C recessum est, eo insignior erit excessus.

Semicyclois semicirculi tripla.

22. Quoniam igitur figura sic circumscripta Semicycloidi C Z A, aut ipsius parti C Z, (utrobique enim eodem modo procedit demonstratio,) minor est quam tripla figuræ semicirculo C z F, aut ipsius parti C z, circumscriptæ, (quotcunque fuerint illic trapezia, hic triangula;) inscripta verò inscriptæ major quam tripla: Et quidem augendo illic numerum trapeziorum, hic triangulorum, eo tandem devenietur utrobique, ut differentia figuræ inscriptæ à circumscripta minor sit quavis assignatâ, (adeoque in infinitum procedendo evanescat:) erunt tum figuræ singulæ quadrilineæ (qualis B β ζ Z) singularum respectivè sumptarum trilinearum (qualis b F z,) tum omnes omnium, triplæ. Hoc est, tum Semicyclois C Z A F semicirculi C z F, tum istius segmentum B β ζ Z sectoris hujus b F z,

tum

tum segmentum Z A ζ segmenti z F z, tum segmentum Z ζ F C sectoris z F C, (& sic ubique) triplum.

23. Jam vero, ex ductu Semiradii ($\frac{1}{2}$ G z) in arcum z C, hoc est rectam Z z , habetur sector G z C ; atque ex ductu semiradii ($\frac{1}{2}$ G F) in altitudinem z Y, habetur Triangulum G z F: Ergo ex ductu Semiradii in totam Z Y , habetur sector F z C: Atque ex ductu Sesquiradii in eandem Z Y, habetur segmentum ζ Z C F : Unde si auferatur ζ Z Y F trapezium, habetur dimensio segmenti C Z Y quæsita : Vel etiam , subducto insuper C z Y, habetur C z Z trilineum. *Segmentum C Z Y.*

24. Porro , Quoniam si ponamus semicirculum ex infinitis trilineis, qualia C n F, n z F, &c. vel etiam (nam & hoc, propter infinitatem , adeoque & approximationem in infinitum , tantundem valet,) ex infinitis triangulis, qualia O n F, p z F, &c, constare : ponendum & semicycloidem constare ex totidem quadrilineis , ut C N ν F, N Z ζ ν, &c ; vel etiam trapeziis numero infinitis, ut O N ν F, P Z ζ ν ,&c ; quorum quodvis exhibeat tum Triangulum tum Parallelogrammum istius duplum. Ex conversione autem Parallelogrammi , ut N F , circa axem A F, fiet Cylindrus, saltem distortus ; & ex simili conversione Trianguli , ut O n F, in hoc situ, fiet similis Cylindrus conice excavatus, qui erit $\frac{2}{3}$ cylindri pleni : Ex conversione igitur Trapezii , ex parallogrammo simul & triangulo constantis , fit solidum quod ad solidum conversione Trianguli est ut 1 + $\frac{2}{3}$ ad $\frac{2}{3}$, sive ut 5 ad 2. Quod cum ubique fiat ; erit solidum ex conversione cycloidis, ad solidum ex conversione circuli circa rectã A F, ut 5 ad 2. (Quod ipsum etiam sic colligitur. Centrum gravitatis Trapezii P Z ζ ν distat ab A F, per $\frac{5}{9}$ rectæ F Y ; centrum autem gravitatis Trianguli p z F ab eadem A F recta , distat $\frac{2}{3}$ vel $\frac{6}{9}$ ejusdem F Y : Centrorum itaque ab A F distantiæ sunt ut 5 ad 6 ; Et magnitudines ostensæ sunt ut 3 ad 1. Ergo quæ ex illis componitur, sive momentorum respectu A F rectæ, sive solidorum circa eandem A F conversione factorum, ratio, est ut 5 ad 2. Nempe $\frac{5}{6} \times \frac{3}{1} = \frac{5}{2}$.) *Solidũ axis A F.*

25. Ex ea vero conversione circuli , fiet annulus (ut loquuntur) clausus, æqualis Cylindro cujus basis est ille circulus, & altitudo æqualis istius circuli circumferentiæ, hoc est rectæ A D, fig. 1. Solidum itaque ex ea conversione Cycloidis , æquatur Cylindro

Cylindro cujus basis est idem circulus C F, & altitudo æqualis rectæ quæ sit ad istius circumferentiam ut 5 ad 2; hoc est, dupla sequialtera rectæ A D. (Est utique annulus ille $\frac{1}{4}$ D P × P $-\frac{1}{4}$ D P²; & solidum illud Cycloidicum $\frac{5}{8}$ D P². Intelligendo scilicet per D, diametrum, &, per P, peripheriam circuli generantis: ut & deinceps alibi passim.)

Segmenta solidi circa A F. 26. Sed & pari argumento de partibus judicandum erit. Nempe tum solidum ex conversione segmenti ζ Z A, ad solidum ex conversione segmenti F z F; ut & solidum ex conversione Quadrilinei ζ Z C F, ad solidum ex conversione sectoris F z C, est ut 5 ad 2. Dantur autem hæc, ergo & illa.

27. Sed & insuper, si ex solido ex conversione quadrilinei ζ Z C F, auferatur solidum ex conversione trapezii ζ Z Y F, manebit annulus conversione segmenti C Z Y circa axem A F factus; qui itaque datus est.

Fig. 3. 28. Est autem Annulus ille, æqualis solido Z Y C Φ υ ξ fig. 3.ª (ut §. 8. ostenditur;) unde si auferatur datum prisma Y Z ξ υ κ C (cujus basis est segmentum modo repertum C Z Y, altitudo Y υ, quæ est ad C Φ sive 2 A D, ut F Y ad F C;) quod superest solidum Φ ξ υ κ æquatur solido ex conversione segmenti C Z Y circa rectam Z Y facto.

Solidū axis C F. 29. Ut vero habeamus solidum ex conversione Semicycloidis circa rectam C F, ejusque solidi segmenta, libet paulo immutare constructionem, (nulla necessitate, sed phantasiæ juvandæ gratia.) Nempe cum prius ostendimus, in figura circumscripta, Trapezii Parallalogrammum minus esse quam Trianguli duplum, sed majus in figura inscripta; differentiam verò utrobique (sectione in infinitum continuata) evanescere; adeoque reapse perinde esse sive inscriptæ sive circumscriptæ figuræ Trapezia perpendamus, (& de Triangulis similiter:) Commodum jam videtur viam inter utramque mediam sectari, adeoque tum Trapezia Cycloidis, tum Triangula circuli, partim circumscribere, partim inscribere; puta pro Trapezio Z ζ ν P fig. 1. Trapezium V β ν P; &, pro Triangulo z F þ, Triangulum υ F p substituendo; ut tum illic recta Z ζ trapezium, tum hic recta z F triangulum, quasi medium secet. (Utut enim in sectione definita V Z major sit quam Z P, & υ z quam z p, hæc tamen differentia, sectione in infinitum continuatâ, evanescit; adeoque

Fig. 1.

in

in figuris infinite exiguis, tum trapeziis tum triangulis, supponenda est æqualitas.) Sed & insuper, si libet, licebit (ductâ recta $\zeta \pi$) trapezii triangulum $u \zeta \pi$ parallelogrammo medium interponere; adeoque substituere, pro uno parallelogrammo integro, duo parallelogramma dimidia $V \zeta$ & ζP (supponitur utique, propter continuatam in infinitum sectionem, tum $Z \pi$, πP, tum $\zeta \nu$, πP, invicem æquales esse;) quæ duo parallelogramma dimidia tantundem circumvolvendo præstant sive rectæ $Z \zeta$ utrinque contigua, sive æqualiter utrinque remota fuerint: cum sit idem utrobique centrum gravitatis. (Supponimus enim, quod & facile si opus sit probabitur, planum quodvis tantundem hujusmodi conversione producere quantum est quod fit ex eodem plano in lineam ipsius centro gravitatis descriptam ducto; quod & de lineâ quavis sive recta sive curva in eo plano descriptâ pariter intelligendum est. Quod quidem quum ipse olim me primum invenisse putaverim, monitus mox eram nonnihil apud Guldinum exstare quod huc spectat. Id autem si animadvertisset Tacquetus, dum *de Cylindricis & Annularibus* acutum opus conscripsit, non parum illi fuisset adjumento; multaque quæ illic exstant tum universalius tum & contractius forte fuissent tradita.)

30. Re sic constructa; Ratio Solidi ex conversione Trapezii $V \beta \nu P$, ad solidum ex conversione Trianguli $\upsilon F p$; componitur ex ratione Trapezii ad Triangulum, (hoc est, sectione in infinitum continuatâ, ut 3 ad 1;) atque ex ratione distantiarum centri gravitatis in utraque figura à conversionis axe; Nempe, in Trapezio, puncti K, quod ita dividit rectam $Z \zeta$, ut sit ζK ad $Z \zeta$, ut 5 ad 9; (adeoque distantia Kk erit $zZ + \frac{5}{9} zY$;) In Triangulo, puncti H, quod ita dividit rectam Fz, ut sit FH ad Fz ut 2 ad 3; (adeoq; distantia Hh est $\frac{2}{3} zY$.) Ratio itaque distantiarum est, ut $zZ + \frac{5}{9} zY$ ad $\frac{2}{3} zY$; sive ut $3zZ + \frac{5}{3} zY$ ad $2zY$; quæ si cum ratione planorum 3 ad 1 componatur, emergit solidorum ratio ad invicem, ut $9zZ + 5zY$ ad $2zY$; sive, ut $5zY$ ad $2zY$ (hoc est, ut 5 ad 2,) atq; insuper ut $9zZ$ ad $2zY$. Quod quidem cum ubique fiat, sitq; eadem ubique ratio $5zY$ ad $2zY$, adeoq; & omnium ad omnes; non autem eadem ubique ratio $9zZ$ ad $2zY$, sed neque æqualia ubique triangula $\upsilon F p$ circumducta, (quorum si utrumvis esset, pro omnibus $9zZ$ ad $2zY$, ponendum esset 18 ad 2; quia nempe omnes zZ ad omnes zY, hoc est trilineum CAFz ad semicirculum CzF, est ut 2 ad 1;

C cuum

quum autem eorum neutrum sit, non licet sic arguere;) præter rationem illam 5 ad 2, quærenda est alia ratio; nempe quam habeat noncuplum omnium z Z (sive z C arcuum arithmetice proportionalium) in respectiva Triangula υ F p, ad duplum omnium z Y (sinuum rectorum eorundem arcuum) in eadem respectivè triangula. Hoc est (propter triangulorum bases æquales) noncuplum arcuum arithmetice proportionalium, in residuorum sinus versos ductorum (utpote Triangulorum altitudines,) ad duplum sinuum rectorum in eosdem sinus versos; Hoc est (ut deinceps fusius ostendetur § 74 *&c.*) ut differentia quadratorum basis A F & altitudinis C F, ad $\frac{2}{9}$ quadrati C F, sive ut 9 A Fq − 9 C Fq ad 2 C Fq. Cui si adjungatur ratio 5 ad 2, hoc est 5 C F q ad 2 C Fq; fiet 9 A F q − 4 C F q ad 2 C F q, ratio solidi ex semicycloidis conversione circa C F, ad sphæram circuli genitoris.

Fig. 1.

Segmenta solidi circa C F.

31. Eodem fere modo etiam de solidis ex conversione segmentorum arguendum. Nam & hic omnia minuta Trapezia segmenti, verbi gratia ζ Z C F, circumducta; ad omnia minuta Triangula sectoris F z C sic circumducta, circa eandem rectam C F: sunt ut 5 ad 2, atque insuper, ut noncuplum omnium z Z in respectiva Triangula, ad duplum omnium z Y in eadem triangula: sin ex hoc demum solido, auferatur solidum ex conversione Trapezii ζ Z Y F circa rectam C F factum; manebit solidum ex conversione segmenti C Z Y circa rectam C Y.

32. Et pari fere processu, si demissâ recta Z X rectæ C F parallelâ abscindi intelligatur segmentum Z X A; istius segmenti tum dimensio, tum & solidi inde facti, sive conversione circa rectam C F, sive circa rectam Z X, facile colligitur. Sed hæc inter quæsita non sunt.

Centrum Gravitatis Semicycloidis.

33. Ad centrum gravitatis inveniendum, supponimus ob datas C F, A D, fig. 1. datam esse circuli quadraturam; adeoque & centrum gravitatis in segmentis. Nam ut, ex dato centro gravitatis in circuli segmentis, colligi posse circuli quadraturam, jam ab aliis ostensum est; sic vice versa, ex data quadraturâ facile colligitur centrum gravitatis in segmentis. (Quod, si opus sit, deinceps ostendetur § 67 & seqq.)

Quantum distat à C F.

34. Ponamus itaque primò centrum libræ in G, & rectam C F lineam æquilibrii (libræ transversam:) sitque utriusvis semicirculi

circuli CF centrum gravitatis punctum E (in circuli diametro basi Cycloidis parallela,) Quoniam vero momentum semicycloidis ad momentum semicirculi, respectu lineæ CF; est in ratione compositâ ex rationibus magnitudinum, & distantiarum centri gravitatis ab eadem æquilibrii linea CF; atque ex eisdem rationibus componatur ratio solidorum ex eorundem planorum circa CF conversione genitorum, (ut supra insinuatum est § 29.) eadem erit momentorum ratio, atque ratio solidorum sic genitorum. Nempe, ut 9 AFq − 4 CFq ad 2 CFq. Ut § 30. dictum est.

35. Ductâ itaque Ge basi Cycloidis parallelâ, quæ sit ad GE, ut 9 AFq − 4 CFq ad 2 CFq: Si intelligatur ex puncto e suspendi æqualis semicirculus, æquiponderabit ille semicycloidi oppositæ in suo situ. Quoniam vero magnitudo semicycloidis est ad magnitudinem semicirculi, ut 3 ad 1; si sumatur (in utrovis semicycloide) recta GΓ (basi parallela) quæ sit ad Ge, ut 1 ad 3; & ducatur recta Γγ rectæ CF parallela; erit centrum gravitatis istius semicycloidis in recta Γγ.

36. Ponamus deinde Centrum libræ in F, & rectam AD lineam æquilibrii. Quoniam momentum semicycloidis ad momentum semicirculi, respectu rectæ AD, est in ratione composita ex rationibus magnitudinum, & distantiarum centri gravitatis ab eadem AD; adeoque in eadem ratione cum solidis ex conversione circa rectam AD factis, hoc est(ut supra dictum est § 24) ut 5 ad 2; Si in continuata GF, sumatur Ff, quæ sit ad FG ut 5 ad 2; semicirculus in puncto f, æquiponderabit semicycloidi in suo situ: Cumque semicyclois sit ad semicirculum ut 3 ad 1; si sumatur (in recta FG) recta FΔ, quæ sit ad Ff ut 1 ad 3; atque à puncto Δ ducatur basi Cycloidis parallela Δδ (rectæ Γγ occurrens in δ,) erit centrum gravitatis semicycloidis in recta Δδ; adeoque in illius puncto δ. *Quantum distat ab AF.*

37. Atque ex iisdem principiis, eodem fere processu, colligetur centrum gravitatis segmenti CZY. Erit enim momentum segmenti CZY ad momentum segmenti CzY respectu lineæ æquilibrii CF, ut solidum istius ad solidum hujus conversione circa eandem CF factum: sed hæc ratio dari supponitur ex § 31: ergo & illa: Esto ut α ad β. Sed & data est ratio magnitudinis ad magnitudinem, per § 23: Esto hæc ut α ad γ. *Centrum gravitatis segmenti CZY.*

Datur item ſegmenti C z Y centrum gravitatis (ut § 33. ſuppoſitur, & § 67. *&c.* deinceps oſtendetur;) adeoque & ipſius diſtantia ab æquilibrii linea C F: Eſto ea ε. Erit itaque, propter $\frac{\alpha}{\gamma}$) $\frac{\alpha}{\beta}$ ($\frac{\gamma}{\beta}$, Diſtantia centri gravitatis ſegmenti C Z Y ab eadem C F recta, ad diſtantiam ε, ut γ ad β. (Nempe in ratione quæ componitur ex ratione momentorum, α ad β; atque reciprocâ magnitudinum, γ ad α.) puta $\frac{\gamma\varepsilon}{\beta}$.

38. Similiter momentum ſegmenti C Z Y ad momentum ſegmenti C z Y, reſpectu lineæ Z Y, eſt ut ſolidum iſtius ad ſolidum hujus converſione circa rectam Z Y factum. Sed hæc ratio ſuperius data eſt, per § 28; Ergo & illa. Eſto ut α ad δ. Magnitudinum autem ratio (ut prius) ut α ad γ. Diſtantia vero centri gravitatis ſegmenti C z Y à recta Z Y, ſit ζ. Erit diſtantia centri gravitatis ſegmenti C Z Y ad diſtantiam ζ, ut γ ad δ. Nempe $\frac{\gamma\zeta}{\delta}$.

39. Cum itaque data ſit iſtius diſtantia tum à recta C F, tum à recta Z Y, (atque intra ipſum ſegmentum eſſe conſtet,) datur & ipſum gravitatis centrum quæſitum.

Centrum ſolidi circa A F.

40. Deinde, ad inveniendum centrum gravitatis in ſolidis; Supponimus ut ſupra in ſegmentis circularibus, ita jam in ſphæralibus ſegmentis centrum gravitatis datum eſſe: vel, ſi exigatur, parati ſumus exhibere, ut infra § 67 & ſeqq.

41. Ponamus jam ſolidum factum ex converſione ſemicycloidis C A F circa rectam A F, ſecari plano quod plano C A F recte inſiſtat in A F rectâ, ſemiſolidum abſcindens; cujus propterea centrum gravitatis in plano C A F eſſe manifeſtum eſt.

42. Deinde, cum ſolidum ſive ex converſione, ſive ex ſemiconverſione Trapezii V β ν P (circa rectam A F,) ad ſolidum ex ſimili converſione vel ſemiconverſione trianguli ν F p, ſit ut 5 ad 2, (ut § 24 oſtenſum eſt;) quærantur utriuſque centra gravitatis, ut habeatur ratio diſtantiarum tum à recta A F tum à recta C F.

43. Habetur autem ſolidi ex ſemiconverſione Trapezii Centrum gravitatis, ſi in recta ζ Z intelligatur punctũ K abſcindere rectam

ζ K

ζK quæ ſit ad ζZ ut 7 ad 10 (quod quidem centrum gravitatis eſſet ſi curvatura figuræ demeretur ; putà , ſi pro ſingulis ſemicirculis ſive ſuperficiebus ſemicylindricis circa axem A F intelligantur totidem lineæ rectæ vel ſuperficies planæ plano C A F ad angulos rectos poſitæ atque ab eo biſectæ ;) atque deinde in recta K κ quæ ſit baſi A D perpendicularis , ſumatur (propter curvaturam) ut C F ad F A (hoc eſt , ut Diameter ad Semiperipheriam circuli ,) ſic κ Φ ad κ K, (qua nempe ratione dividendus eſt axis ſemicirculi ut habeatur ſemiperipheriæ centrum gravitatis :) Erit Φ centrum gravitatis ſolidi ex ſemiconverſione Trapezii V β ν P circa rectam A F.

44. Centrum autem gravitatis ſolidi ex ſemiconverſione Trianguli , habetur, ſi à rectæ F z puncto H, quod jam intelligatur abſcindere rectam F H, quæ ſit ad F z, ut 3 ad 4, (quod nempe centrum gravitatis eſſet ſi demeretur curvatura,) perpendicularis H η intelligatur (propter curvaturam) ita dividi in φ ut modo diviſimus K κ in Φ. Erit utique φ centrum gravitatis ſolidi ex ſemiconverſione Trianguli υ F p circa rectam A F. (Quamquam revera perinde omnino eſt ad hoc negotium an omnino reperiantur puncta Φ, φ, an tantum puncta K, H : Nam eadem eſt diſtantia, quantum ad rectam C F, punctorum K & Φ, item punctorum H & φ ; &, quantum ad rectam A F, eadem ſaltem diſtantiarum ratio, ſive puncta K , H, ſive Φ, φ, conſiderentur.)

45. Cum igitur ratio diſtantiarum ſive punctorum K, H, ſive Φ, φ, à recta A F , ſit ut $\frac{7}{10}$ ad $\frac{3}{4}$, ſive 28 ad 30, vel 14 ad 15 ; & magnitudinum, ut 5 ad 2 : Erit, quæ ex his componitur , ratio momentorum, ut 70 ad 30, ſive 7 ad 3. Quod cum ubique fiat ; eadem erit & ratio momenti ſolidorum ex ſemiconverſione trapeziorum omnium ad omnium triangulorum ſic converſorum momentum, hoc eſt, momenti ſolidi ex ſemiconverſione ſemicycloidis, ad momentum ſolidi ex ſemiconverſione ſemicirculi, (circa rectam A F,) reſpectu rectæ A F : Nempe ut 7 ad 3. Unde colligentur puncta f, Δ, δ, ut ſupra. Nempe ſi intelligatur G centrum gravitatis ſolidi ex ſemiconverſione circuli circa rectam A F, (quod punctum G dari ſupponimus , vel , ſi exigatur, deinceps exhibebimus § 56 ;) & fiat , ut 3 ad 7 , ſic F G ad F f ; & deinde, ut 5 ad 2, ſic F f ad F Δ ; atque ducatur

Quantum diſtat ab A F.

tur Δ δ basi parallela; erit centrum gravitatis solidi ex semiconversione semicycloidis circa rectam A D, in recta Δ δ.

Quantum distat à C F.

46. Cum vero distantia puncti sive K sive Φ à recta C F sit z Z + $\frac{7}{10}$ z Y; atque distantia puncti H vel φ ab eadem recta sit $\frac{3}{4}$ z Y; (quorum utrumque ex dictis patet:) erit distantiarum ratio, ut z Z + $\frac{7}{10}$ z Y ad $\frac{3}{4}$ z Y, sive ut 20 z Z + 14 z Y ad 15 z Y: Quæ si cum ratione magnitudinum 5 ad 2 componatur, habetur momentorum ratio 100 z Z + 70 z Y ad 30 z Y, sive 10 z Z + 7 z Y ad 3 z Y. Quod cum ubique fiat; pro ratione momenti solidi ex conversione (vel semiconversione) semicycloidis, ad momentum solidi ex conversione (vel semiconversione) semicirculi circa rectam A F, respectu lineæ æquilibrii C F, sumenda erit tum ratio 7 ad 3 (propter 7 z Y ad 3 z Y) tum (propter 10 z Z ad 3 z Y) ea ratio quam habet decuplum momenti solidorum ex conversione triangulorum υ F p circa A F, suspensorum in distantiis z Z respective, ad triplum momenti eorundem solidorum suspensorum in distantiis z Y: Nempe ut $\frac{5}{32} R P^3 - \frac{10}{3} R^3 P$ ad $\frac{2}{3} R^3 P$, sive ut 15 A F q—20 C F q ad 4 C F q. (Quod § 87 & seqq. fusius declaratur.) Quæ quidem ratio si cum ratione 7 ad 3 conjungatur, habetur ratio momenti (respectu rectæ C F) solidi ex conversione (vel semiconversione) semicycloidis circa rectam AF, ad momentum solidi ex simili conversione (vel semiconversione) semicirculi: Nempe $\frac{5}{32} R P^3 - \frac{16}{9} R^3 P$ ad $\frac{2}{3} R^3 P$, sive ut $45 P^2 - 512 R^2$ ad $192 R^2$, Hoc est, ut 45 A F q — 32 C F q ad 12 C F q.

47. Si itaque ponamus G E distantiam centri gravitatis solidi ex ea conversione vel semiconversione semicirculi, (a recta C F;) & fiat, ut 12 C F q ad 45 A F q—32 C F q, sic G E ad G e; iterumque, ut 5 ad 2, sic G e ad G Γ; & ducatur Γ γ parallela rectæ C F: Erit semisolidi ex conversione (hoc est solidi ex semiconversione) Semicycloidis circa rectam A F, centrum gravitatis in recta Γ γ; adeoque in ipsius eo puncto ubi occurritur rectæ Δ δ modo inventæ § 45. (Designamus autem in schemate centrum gravitatis in ea semicycloide, ubi minor futura esset linearum confusio; perinde enim ad rem est, in utrâ designetur.

Centrũ solidi integri, circa A F.

48. Habito autem centro gravitatis in semisolido, a fortiori

ri in solido integro haberi certum est : puta in Axis puncto γ.

49. Eodem fere processu (mutatis mutandis, ut supra § 31,) colligitur centrum gravitatis semisolidi ex conversione segmenti ζ Z C F circa rectam A F; & consequenter etiam centrum gravitatis semisolidi ex conversione segmenti C Z Y, tum circa rectam A F, tum & circa rectam Z Y. *Centrũ semisolidi ex segmento.*

50. Tandem superest ut centrum gravitatis semisolidi ex conversione Semicycloidis circa rectam C F investigemus. Nempe si semisolidum illud plano abscindatur quod plano C A F in recta C F recte insistat; manifestum est gravitatis centrum fore in ipso plano C A F. Quæritur, in quonam ejus puncto. Hoc modo. *Centrum semisolidi circa C F.*

51. Semisolidum ex conversione trianguli υ F p, erit semiconus excavatus; cujus propterea centrum gravitatis, si curvaturam demas, erit in rectæ z F puncto H, quod abscindat F H = $\frac{3}{4}$ z F; (nempe in recta z F sic secta ut secanda esset F Y ad inveniendum centrum gravitatis hujus solidi integri;) sed deinde, propter curvaturam semicircularem versus rectam C F, (si verum gravitatis centrum indagare libeat,) abscindenda est rectæ H h, ea portio versus h, quæ sit ad totam H h ut diameter circuli ad semicircumferentiam; (sic utique dividendus est axis semicirculi ut habeatur semiperipheriæ centrum gravitatis.)

52. Semisolidum autem ex conversione Trapezii V β ν P, est frustum coni excavatum, cujus centrum gravitatis (si curvaturam demas) est in rectæ ζ Z eo puncto, puta K, quo ita dividitur ut dividenda esset F Y ad inveniendum centrum gravitatis hujus solidi integri, nempe excavati frusti conici. Centrum autem gravitatis verum, est (propter curvaturam) in rectæ K k eo puncto quo ita dividitur ut de H h modo diximus.

53. Cum itaque horum semisolidorum ratio momentorum, tum respectu rectæ C F, tum rectæ A F, componatur ex rationibus magnitudinem & distantiarum; reperientur puncta Γ, Δ, simili fere methodo quo supra; adeoque & punctum δ, centrum gravitatis semisolidi; & simul centrum gravitatis solidi integri, puta punctum Axis Δ.

54. Cumque similiter faciendum sit (mutatis mutandis ut § 31, 49,) de semisolido ex conversione segmenti, puta ζ Z C F; pariter *Centrum solidi ex segmento.*

pariter datum erit & hujus centrum gravitatis; & consequenter (propter datum etiam centrum gravitatis semisolidi ex conversione Trapezii ζ Z Y F,) centrum gravitatis semisolidi (adeoque & solidi integri) ex conversione segmenti C Z Y circa C F. Dabuntur itaque quæ quærebantur omnia.

55. Possumus autem hæc eadem exhibere, etiam sine ope centrorum K, H, &c; methodo mihi quidem facili & familiari, ex principiis in nostra *Infinitorum Arithmetica* traditis desumpta, (& quidem in multis expeditiùs:) sed quam alii forsan haud ita prompte sine longiori verborum apparatu assequerentur.

Atque hactenus ea sunt quæ ad D. Carcavium mensibus Augusto & Septembri, Anni 1658, miseram (hoc est, intra tempus a proponente limitatum,) methodum meam, totiusque rei quasi sceleton, exhibentia: Et quidem iisdem fere tum verbis tum ordine; Nisi quod ad § 30 numeros emendaverim qui vitiosi erant, utpote quos investigando Trilineum C A F fig. 7. circa rectam A F incautus converteram cum circa C F convertendum esset, & similiter ad § 46; Quem calculi lapsum ubi deprehenderam, literis eodem Septembri datis insinuabam; meque insuper tum istius emendationem, tum alia quæ sibi suisve ad justam demonstrationem deesse visa forent, ubi hoc indicaverint, exhibiturum. Cum autem nihil inde hactenus monitus fuerim, (quod oblatæ conditiones expectandum innuunt, ut & emendandi calculi veniam impune permittunt;) ea tamen quæ sequuntur, quasi scholiorum instar, ad præcedentium tum illustrationem tum justam demonstrationem, libet hic subjungere.

Centrum portionis cylindri oblique secti, & semiannuli.

Fig. 5.

56. Quum supra § 45 desiderari videatur punctum G, quod ibidem designat (non centrum circuli, sed) centrum gravitatis semiannuli ex semiconversione circuli C F circa rectam A D: Illud hac methodo investigamus. Super circulo C z F fig. 5. (qui circulo C z F genitori Cycloidis æquetur) erigatur Cylindrus rectus F c, altitudinem habens C c circuli genitoris perimetro æqualem, adeoque æqualem semiperipheriæ circuli radio F C descripti. Et intelligatur Cylindrus ille bisecari, tum per axem plano F c C parallelogrammo; tum per hujus diagonalem

F c

F c transeunte plano elliptico F c ζ, quod plano F C c recte insistit; tum denique plano basi parallelo φ κ; reliquaque construantur ut in schemate. Dico primò, Cylindri portionem plano elliptico abscissam F ζ ζ c C, per omnia æquari semiannulo exposito, dempta curvaturâ. Nempe rectam C c æquari semicirculo à puncto C descripto; & similiter rectas Y υ, z ζ, (sumptis ubivis in base Cylindri respectivis punctis Y z,) semiperipheriis punctorum similiter positorum in semiannulo; item Y ζ parallelogrammum, semisuperficiei cylindricæ recta Y z in annulo descriptæ; & sic ubique. Nec aliter differt hæc portio Cylindrica ab illo semiannulo, quam quod semisuperficies cylindricæ omnes rectis Y z in annulo descriptæ, in portione Cylindri in planum expandantur; adeoque hæc Cylindri portio tantundem valet atque semiannulus dempta curvitate.

57. Centrum autem gravitatis in exposita Cylindri portione, sic colligitur. Si ponamus C c lineam æquilibrii (adeoque planum huic perpendiculariter insistens, æquilibrii planum;) erunt, tum altitudines Y υ ad invicem, ut rectæ F Y; tum distantiæ ab æquilibrii plano, ut Y C; adeoque, quæ ab ipsis fiunt, ut rectangula F Y C, hoc est, ut quadrata Y z; quæ quidem in ipsas Y z ducta, hoc est, facta ex basis in altitudinem & distantiam continuo ductu, hoc est, planorum Y ζ momenta respectu rectæ C c, sunt ut cubi rectarum Y z. (Per *momentum* autem, tum hic, tum passim alibi, intelligo factum ex magnitudine in distantiam ab æquilibrii plano ducta; ut quæ momentis sunt proportionalia.) Sunt autem omnes cubi rectarum Y z, ad totidem cubos rectæ C F; hoc est, momentum F Y υ ζ c C portionis semicylindri in suo situ, ad momentum Parallelepipedi æquealti basin habentis quadratum F C ex puncto F suspensi; ut 3 ad 32 □; (ubi per 1 ad □ intelligo rationem circuli ad quadratum diametri, sive ut *P* ad 4 *D*;) quod mox probabitur § 63; adeoque, ad momentum Cylindri parallelepipedo illi inscripti similiter suspensi, ut 3 ad 32; (substitutis scilicet circulis pro diametri quadratis:) Et propterea, momentum F ζ ζ c C Portionis integri Cylindri in suo situ, ad momentum Cylindri sic suspensi, ut 3 ad 16. Est autem magnitudo ad magnitudinem, ut 1 ad 2. Ergo, distantia ad distantiam, ut 3 ad 8. Si itaque dividatur F C in g, ut sit C g ad C F ut 3 ad 8; & du-

catur $g\gamma$ rectæ C c parallela: Erit centrum gravitatis portionis expositæ $F\zeta\zeta c C$ in recta $g\gamma$. Sed & (quod tamen ad præsens negotium quæsitu non est necessarium, ipsum enim g punctum jam inventum nobis sufficit,) idem gravitatis centrum est in recta $F\varkappa$, (quippe quæ per omnium $z\zeta$ parallelogrammorum centra transit, ipsique revera F C in annulo respondet;) ergo in eorum communi puncto γ.

58. Si itaque ut rectam $F\varkappa$ in γ, vel F C diametrum basis Cylindri in g, ita & F C axem annuli dividamus in g, (quod semiannuli centrum gravitatis esset dempta curvatura:) ipsamque $Fg = \frac{5}{8}D$ dividamus iterum (propter curvaturam) in G, ita ut sit F G ad F g, ut circuli diameter ad semicircumferentiam; erit G centrum gravitatis semiannuli ex semiconversione circuli F G circa A F rectam. Habetur itaque (quod §. 45. supponitur) semiannuli centrum gravitatis G. (nempe, ut $\frac{1}{2}P$ ad D, sic $Fg = \frac{5}{8}D$ ad $\frac{5D}{4P}D = FG$.) Et consequenter, propter $\frac{5}{2}$) $\frac{7}{3} \times \frac{5D^2}{4P}$ ($\frac{7D^2}{6P}$, erit $\frac{7D^2}{6P}$, vel $\frac{14R^2}{3P}$, $= F\Delta$ fig. 1. distantia centri gravitatis solidi (semiconversione semicycloidis circa A F facti) ab A F.

59. Ut autem habeatur E, centrum gravitatis semiannuli ex simili semiconversione semicirculi, sumenda adhuc erit, à puncto G jam proxime invento, recta G E (basi parallela) quæ tanta sit quanta distantia centri gravitatis semicirculi F C à circuli centro; quæ nempe sit ad $\frac{1}{2}$ F C (sive $\frac{1}{2}$ radii) ut F C ad F A, sive ut D ad $\frac{1}{2}P$.

60. Quod autem §. 57. probandum suscepimus, Nempe omnes cubos rectarum Y z ad totidem cubos C F, esse ut 3 ad 32 □; sic ostenditur ex nostræ *Infinitorum Arithmeticæ* principiis. Si ponamus diametrum $FC = D$ in partes æquales numero infinitas dividi in punctis Y; erunt omnes $FY = a$ series infinita Primanorum, sive Arithmeticæ proportionalium, quorum maximum est D; quæ in $YC = D - a$ respective ductæ, dant Residua $aD - a^2$ omnia rectangula F C Y, hoc est omnia Quadrata Y z; quæ ad totidem D^2 sunt 1 ad 6; Residuorum vero Quadrata, hoc est rectarum Y z Biquadrata, ad totidem D^4, ut 1 ad 30; Residuorum cubi, hoc est rectarum Yz potestates sextæ, ad totidem

totidem D^6, ut 1 ad 140.&c. Unde colligitur series 1, 6, 30, 140, 630, &c. (Arith. Infin. pr. 133.) Quæ non alia eſt quam series 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{15}{8}$, $\frac{105}{48}$, $\frac{945}{384}$, &c, in seriem Geometrice proportionalium 1, 4, 16, 64, 256, &c, reſpective ducta : Adeoque series illa (ibid. prop. 189.) interpolata 1, $\Box$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}\Box$, $\frac{15}{8}$, $\frac{8}{5}\Box$, &c, in hanc item interpolatam 1, 2, 4, 8, 16, 32, &c, reſpectivè ducta, exhibebit illā primā interpolatā 1, $2\Box$, 6, $\frac{32}{3}\Box$, 30, $\frac{256}{5}\Box$, 140, &c. Et propterea, ſicut 1 ad 6, 30, 140, &c, exhibent rationes quas habent rectarum omnium Y z poteſtates ſecunda, quarta, ſexta, &c. ad totidem D^2, D^4, D^6, &c : Sic 1 ad $2\Box$, $\frac{32}{3}\Box$, $\frac{256}{5}\Box$, &c, exhibebunt rationes quas habent earundem rectarum Y z poteſtates prima, tertia, quinta, &c, ad totidem D, D^3, D^5, &c. Et ſpeciatim (quod noſtra jam intereſt) omnes cubi rectarum Y z, ad totidem D^3 ſive cubos FC, rationem habebunt 1 ad $\frac{32}{3}\Box$, ſive ut 3 ad $32\Box$. Quod ſuſcepimus probandum.

61. Porro, quum calculus ad § 51, 52, 53, 54, (ubi agitur de centro gravitatis ſolidorum ex converſione Semicycloidis circa rectam C F) omiſſus ſit, & calculi tantum fundamenta remotiora exhibita : libet hic calculum illum aliquatenus exhibere, juxta methodum quam § 55 inſinuavi. Et primo quidem perpendemus converſionem Trianguli υ F p, deinde Trapezii V β ν P. Rectam autem in Triangulo υ p, adeoque & $\mathcal{C}\,\nu$ in Trapezio, dicemus B ; ejuſque aliquotam partem infinite exiguam b ; adeoque V P erit $B + B$, vel $2\,B$. Item z Y, dicemus Y ; ejuſque partem infinite exiguam, y. Et rectam F Y, hoc eſt altitudinem, vel etiam diſtantiam ab A F, dicemus A ; ejuſque partem infinite exiguam, a. Rectam denique z Z, dicemus Z. *Centrum gravitatis ſemiſolidi circa C F.* Fig. 1.

62. His poſitis ; ſupponimus in Triangulo υ F p infinitas rectas parallelas arithmetice proportionales, à vertice F ad baſin uſque υ p continuatas, 0, $1\,b$, $2\,b$, $3\,b$, &c, uſque ad B earum maximam, quæ eſt ipſa υ p. Hæ autem rectæ, dum circa rectam F C convertuntur, deſcribunt totidem annulos planos (ſaltem hujuſmodi annulorum partes ſimiles) æquales totidem rectangulis parallelogrammis a rectis ipſis quæ convertuntur, & peripheriis quæ earum punctis mediis deſcribuntur, contentis ; quas peripherias, ſive integras ſive dimidias, cum ſint radiis proportionales, per ipſos radios deſignabimus, nempe o, $1\,y$, $2\,y$, $3\,y$, &c, uſque ad Y, hoc eſt z Y radiorum illorum maximum. Erunt igitur plana

illa, ut oo, $1\,b \times 1\,y$, $2\,b \times 2\,y$, $3\,b \times 3\,y$, &c, hoc est, oo, $1\,by$, $4\,by$, $9\,by$, &c, usque ad BY. Deinde, cum horum planorum momenta respectu rectæ A F, sint factis ex magnitudinibus in distantias proportionalia; sintque distantiæ, ut $0, a, 2\,a, 3\,a$, &c, usque ad A; erunt ea momenta ut $0\,by \times 0\,a$, $1\,by \times 1\,a$, $4\,by \times 2a$, $9\,by \times 3\,a$, &c, hoc est ooo, $1\,aby$, $8\,aby$, $27\,aby$, &c, usque ad A B Y. Hoc est, omnia momenta, sunt series Tertianorum; Quæ Tertianorum series, ad totidem maximo æqualia, hoc est ad maximum in altitudinem ductum, hoc est ad Cylindrum vel Prisma ejusdem vel æqualis basis æquealtum ex puncto Y suspensum, est ut 1 ad 4. Quod dicamus igitur $\frac{1}{4}\,AABY$.

63. Eodem modo; Infinitæ rectæ Trapezii, à minima B, hoc est $\beta\gamma$, ad usque $B + B$, sive $2\,B$, hoc est V P; sunt $B + 0$, $B + b$, $B + 2\,b$, $B + 3\,b$, &c, usque ad $B + B$. Radii vero peripheriarum à mediis rectarum punctis descriptarum, sunt $Z + 0$, $Z + y$, $Z + 2\,y$, $Z + 3\,y$, &c, usque ad $Z + Y$. Ex quibus seriebus invicem respectivè ductis fit series magnitudinum, $BZ + 0\,Z + 0\,B + 00$, $BZ + bZ + yB + by$, $BZ + 2\,bZ + 2\,yB + 4\,by$, $BZ + 3\,bZ + 3\,yB + 9\,by$, &c, usque ad $BZ + BZ + YB + BY$. Quæ si ducantur in respectivas suas ab A F distantias $0, a, 2\,a, 3\,a$, &c usque ad A; fiet series Momentorum

Fig. 1.

$$0\,BZ + 000Z + 00\,B + 000$$
$$a\,BZ + abZ + ayB + aby$$
$$2\,aBZ + 4abZ + 4ayB + 8\,aby$$
$$3\,aBZ + 9\,abZ + 9ayB + 27\,aby$$
&c usque ad
$$ABZ + ABZ + AYB + ABY$$

Cujus summa est $\frac{1}{2}AABZ + \frac{1}{3}AABZ + \frac{1}{3}AAYB + \frac{1}{4}AABY$.
sive $\frac{5}{6}\,AABZ + \frac{7}{12}\,AABY$.

64. Cum igitur sit ratio momenti hujus ad momentum illius, ut $\frac{5}{6}\,AABZ + \frac{7}{12}\,AABY$ ad $\frac{1}{4}\,AABY$; hoc est (dividendo per A A B) ut $\frac{5}{6}\,Z + \frac{7}{12}\,Y$ ad $\frac{1}{4}\,Y$, sive (ductis omnibus in 12) ut $10\,Z + 7\,Y$ ad $3\,Y$: Nempe, ut $10\,zZ + 7\,zY$ ad $3\,zY$, (eadem scilicet ratio quæ & supra § 46,) Atque hoc ubique: Propter omnes $7\,zY$ ad $3\,zY$, ponenda ratio 7 ad 3; & propter $10\,zZ$ ad $3\,zY$, eadem quæ supra § 45. Et quidem eandem utrobique rationem provenire necesse est, (utut variis modis libuerit investigare:) Nam momentum solidi ex conversione e-

jusdem

jusdem figuræ circa A F respectu rectæ C F, atque circa C F respectu rectæ A F (propter magnitudinum & distantiarum reciprocationem) tantundem erit. Adeoque hinc habetur tum distantia centri gravitatis semisolidi ex semicycloidis semiconversione circa C F, a recta A F; tum integri istius solidi ipsissimum gravitatis centrum, utpote quod in C F situm esse constat.

65. Quantum autem ad distantiam centri gravitatis ejusdem Semisolidi (ex semiconversione semicycloidis circa C F) ab ipsa C F: simili methodo investiganda erit. Cum enim solidum ex semiconversione Trianguli v F p circa C F, sit aggregatum seriei $0\,by$, $1\,by$, $4\,by$, $9\,by$, &c, usque ad BY, (ut supra § 62:) Et solidum ex semiconversione Trapezii V β v P circa eandem C F sit aggregatum seriei $BZ + 0Z + 0B + 00$, $BZ + bZ + yB + by$, $BZ + 2bZ + 2yB + 4by$, $BZ + 3bZ + 3yB + 9by$, &c (ut supra § 63.) Si utraque series ducatur in seriem suarum respective distantiarum a recta C F; (nempe illa, in 0, y, $2y$, $3y$, &c usque ad Y; & hæc, in $Z + 0$, $Z + y$, $Z + 2y$, $Z + 3y$, &c usque ad $Z + Y$;) habebitur series momentorum eorundem solidorum respectu lineæ æquilibrii C F. Unde & aggregati ad aggregatum ratio; hoc est, momenti Semisolidi ex Triangulo, ad momentum semisolidi ex Trapezio (circa C F converso) respectu rectæ C F. Nempe

$0byy$	$BZZ + 0bZZ + 0yBZ + 0byZ + 0yyB + 0byy.$
$1byy$	$BZZ + 1bZZ + 2yBZ + 2byZ + 1yyB + 1byy.$
$8byy$	$BZZ + 2bZZ + 4yBZ + 8byZ + 4yyB + 8byy.$
$27byy$	$BZZ + 3bZZ + 6yBZ + 18byZ + 9yyB + 27byy.$
&c usque ad	&c in infinitum usque ad
BYY	$BZZ + BZZ + 2YBZ + 2BYZ + YYB + BYY.$

Summa $\frac{1}{4}ABYY$ ad summā $ABZZ + \frac{1}{2}ABZZ + \frac{2}{2}AYBZ + \frac{2}{3}ABYZ + \frac{1}{3}AYYB + \frac{1}{4}ABYY.$

five $\frac{1}{4}ABYY$ ad $\frac{3}{2}ABZZ + \frac{5}{3}ABYZ + \frac{7}{12}ABYY.$

Est ut $\frac{1}{4}YY$ ad $\frac{3}{2}ZZ + \frac{5}{3}YZ + \frac{7}{12}YY.$

five ut $3YY$ ad $18ZZ + 20YZ + 7YY.$

Hoc est, ut 3 quadrata rectæ z Y, ad 18 quadrata rectæ z Z una cum 20 rectangulis Z z Y, & 7 quadratis z Y. Quod cum ubique fiat: ut habeatur ratio momenti solidi ex semiconversione omnium Trapeziorum, hoc est Semicycloidis, ad momentum

solidi

solidi ex conversione omnium Triangulorum, hoc est Semicirculi, (circa rectam C F;) quærenda ratio tum omnium Quadratorum z Z arithmetice proportionalium, tum omnium Rectangulorum Z z Y, in respectiva Triangula v F p, sive (propter æquales ubique v p) in respectivas Altitudines Y F; ad omnia Quadrata z Y in eadem respectiva sive Triangula sive Altitudines. Atque ista demum ratio si ducatur in rationem 18 ad 3, sive 6 ad 1; atque hæc quidem in rationem 20 ad 3; & utrisque tandem (sic ductis) adjungatur ratio 7 ad 3: Habebitur ratio ea quam habet momentum solidi ex semiconversione Semicycloidis circa C F, ad momentũ solidi ex Semicirculi circa eandem CF semiconversione, respectu ejusdem C F lineæ æquilibrii. Unde si eximatur ratio magnitudinum; habebitur ratio distantiarum centrorum gravitatis.

Fig. 1.

66. Similiter si sumantur (in fig. 1 vel 8) omnes Z Y æqualibus intervallis distitæ; ex quarum semiconversione circa C F fit solidum Cycloidale, sicut ex semiconversione Semicirculi sive omnium in eo ordinatim-applicatarum circa eandem rectam fit Hemisphærium: Erit momentum illius ad momentum hujus, respectu ejusdem C F rectæ, ut omnes cubi rectarum C Y, ad omnes cubos rectarum z Y: Hoc est, ut omnes z Z c + 3 z Z q × z Y + 3 z Z × z Y q + z Y c, ad omnes z Y c. Quæ quidem omnia similibus methodis ad calculum revocanda sunt atque superiora.

Segmenta Circuli & Sphæra.

67. Porro, siquis de Segmentorum Circularium & Sphæricalium sive Magnitudinibus sive gravitatis Centris hæsitet, (quæ supra § 33, 40, dari supponimus,) sic habeat. De circulo, nemo nescit, ex ductu Semiradii in arcum z C vel z z Fig. 6. haberi sectorem z G C vel z G z; cui si auferatur Triangulum z G C, vel z G z, manebit segmentum z C vel z z C; (intellige, si z C z arcus non excedat Semiperipheriam; ubi enim excedit, non auferendum est, sed addendum Triangulum z G z:) Tum, addendo Triangulum zFC vel zFz, haberi Sectorem zFC vel zFz. Et sic alibi. Et in Sphæra similiter, superficies sphærica zCz, abscissa plano z Y z est ad totam sphæræ superficiem, sive quadruplum circuli maximi, ut C Y ad C F, (uti notum est:) ea vero ducta in trientem radii, dat sectorem sphæricum G z z C (factum ex

Fig. 6.

con-

conversione sectoris circuli z G C circa G C;) unde sublato cono G z z, manebit portio z z C; (intellige de portione quæ hemisphærium non excedit; sin excedat, addendus est, non auferendus, conus ille:) cui portioni si addatur conus F z z, habetur sphæricus sector F z z C, sive solidum ex conversione sectoris circularis z F C circa C F factum. Et similiter de segmentis aliis.

68. Vel etiam idem Sector Sphæricus sic colligi poterit non ineleganter: Inventis nempe tum circumducti Sectoris circularis magnitudine, ut supra, tum centro gravitatis, per § seq. Sector ille circularis ductus in peripheriam hujus centri conversione descriptam, dat sectoris Sphærici magnitudinem. Sed & memorata superficiei Sphæricæ portio plano abscissa, eodem modo colligi poterit: habitis nempe arcus z C tum magnitudine tum centro gravitatis; quippe arcus ille in peripheriam hoc centro circumducto descriptam ductus, dat illam superficiei Sphæricæ portionem: (quæ quidem omnia, quod oppidò notandum est, non tantum de conversionibus integris sed & partialibus perinde valent;) unde non modo portiones jam dictæ, sed & aliæ variis modis positæ, mensuræ subjiciuntur: (Vel, vice versa, Habitis tum portionis superficiei Sphæricæ, tum & arcûs circularis magnitudinibus, invenietur ipsius arcûs centrum gravitatis. Centrum autem gravitatis arcus cujusvis, in radio bisecante situm, distat à centro circuli eâ radii parte quæ sit ad radium integrum, ut istius arcûs subtensa ad ipsum arcum: Distat vero idem gravitatis centrum à diametro huic arcui contermina, simili semisubtensæ parte. Arcuum denique, ut C z, momenta, respectu conterminæ diametri, ut C F, sunt ad invicem, ut eorum sinus versi, C Y. Sed hæc obiter, atque ex abundanti.)

69. De centro gravitatis in Segmentis circuli, res item constat. Cum enim, ob datam (quæ dari supponitur) rationem altitudinis ad basin Cycloidis, hoc est, Diametri ad Circumferentiam circuli, detur etiam arcûs (puta z C z fig. 6.) magnitudo; dabitur etiam segmenti centrum gravitatis. Nempe si fiat (in radio G C qui arcum bisecat) ut z C z arcus, ad sui subtensam z z; sic $\frac{2}{3}$ radii, ad G E: erit E centrum gravitatis Sectoris z G z; sive Semicirculo majus sit, sive minus, sive æquale. [Quod quidem tum ab aliis, & nominatim Hugenio, demonstratum

Centrum Gravitatis Sectoris, vel Segmenti, Circularis.

tum

tum eſt; tum ſi opus eſt, ſic more noſtro poterit demonſtrari: Si intelligatur G z C z Sector, ex æqualibus ſimilibuſque triangulis numero infinitis conſtari, quæ totidem radii repræſentent; per
Fig. 6. horum omnium centra gravitatis quæ tranſit curva, adeoque radiorum illorum duas tertias abſcindit, erit ſimilis arcus circuli radium habentis $\frac{2}{3}$ G C; cujus quidem arcus ſingula puncta (utpote æqualium triangulorum centra gravitatis) cum ſupponenda ſint æque onerata, idem erit tum hujus arcus, tum expoſiti Sectoris, centrum gravitatis: Hujus autem arcûs centrum gravitatis habetur, ſi fiat (quod modo dictum eſt & mox probabitur) ut arcus ille ad ſuam ſubtenſam (hoc eſt, ut arcus ſimilis z C z, ad ſubtenſam ſuam zz,) ſic radius dicti arcûs $\frac{2}{3}$ G C (nempe $\frac{2}{3}$ radii Sectoris expoſiti) ad quartam, quæ erit G E: Eſt itaque punctum E tum hujus arcûs, tum propterea Sectoris expoſiti, centrum gravitatis: Quod oſtendendum erat. Quod autem arcûs centrum gravitatis illud eſt quod diximus; ſic probatur. Quoniam parallela plana eâdem ratione ſecant ſuperficiem Sphæricam, quâ ſecant axem, (quod ab Archimede & aliis demonſtratum eſt;) Manifeſtum eſt, portionem ſuperficiei Sphæricæ quæ arcu z C z Semicirculum non excedente circa b b axem converſo deſcribitur, eam rationem ad totam ſphæræ ſuperficiem habere, quam habet z z ſubtenſa (vel axis portio huic reſpondens) ad b b axem integrum: Puta, ut axis D, ad ſubtenſam s; ſic tota Sphæræ ſuperficies $D P$, ad portionem arcu deſcriptam; quæ itaque eſt $s P$. Quæ quidem portio ſi, per magnitudinem arcus a, dividatur, prodibit $\frac{s}{a} P$ peripheria centro gravitatis iſtius arcûs deſcripta, adeoque hujus peripheriæ radius, hoc eſt diſtantia centri gravitatis dicti arcus a centro circuli, $\frac{s}{a} R$: Nempe ea pars radii G C $= R$; quæ eſt ad totum, ut s ad a, ſubtenſa dicti arcus ad ipſum arcum: Quod probandum ſuſcepimus. Et ſimiliter de centro gravitatis Sectoris z G C (aut alîus cujuſvis) eodem proceſſu conſtabit. Et ſpeciatim, ſemicirculi centrum gravitatis, a circuli centro diſtat, $\frac{8R}{3P} R$, ſive $\frac{2D^2}{3P}$: Nempe ut $\frac{1}{2} P$ ad $D = 2R$, ſic $\frac{2}{3} R$ ad $\frac{8R^2}{3P} = \frac{2D^2}{3P}$. Datis

vero

vero Sectoris cujusvis z G C, & z C G trianguli, tum magnitudinibus tum centris gravitatis, datur etiam centrum gravitatis segmenti z C. Datis autem tum segmenti z C, tum trianguli z C Y, magnitudinibus & gravitatum centris, datur etiam centrum gravitatis aggregati z Y C. Et similiter de Sectoris z F C, aliusve, centro gravitatis constabit.

70. In portionibus Sphæræ, centrum gravitatis sic colligitur. Quadratum rectæ z Y fig. 6. æquat ubique quadratum Radii minus quadrato G Y, (quod patet.) Dicamus autem, ut alibi, Radium R, ejusque partem aliquotam infinite exiguam r. Erunt igitur quadrata omnium z Y (quadrantem b C G complentium) $R^2-0, R^2-r^2, R^2-4r^2, R^2-9r^2$, &c usque ad R^2-R^2, (quod est punctum verticis C.) Sin pro Quadratis hisce substituamus ubique circulos, lateribus quadratorum ut Radiis descriptos, (adeoque quadratis illis proportionales:) pro omnibus R^2 habebimus circulos Cylindri, hemisphærio circumscripti; pro omnibus $0, r^2, 4r^2, 9r^2$, &c, Circulos Coni, cujus vertex G centrum Sphæræ, basis eadem cum base Cylindri, in plano quod Sphæram in C tangit; pro utrorumque vero differentiis R^2-0, $R^2-r^2, R^2-4r^2, R^2-9r^2$, &c, Circulos hemisphærii, (quadratis utique rectarum z Y proportionales;) qui propterea æquales deprehenduntur planis annulis cylindri conice excavati: Sed & eadem habebunt gravitatis centra, (nempe respectiva puncta Y, in recta G C:) æquiponderabunt itaque tum singula singulis respective, tum omnia omnibus; idemque erit centrum gravitatis cylindri hujus conice excavati, atque hemisphærii: Nempe in eo axis hemisphærii puncto quo ita dividitur, ut pars ad centrum Sphæræ sit ad reliquam ut 3 ad 5, sive $\frac{3}{8}$ totius: Id enim ob datum tum Cylindri, tum exempti coni, magnitudines & gravitatis centra facile colligitur.

Centrum Gravitatis Sectoris, vel Segmenti, Sphærici.

71. Vel sic. Cum circuli hemisphærium complentes, sint (quod modo dictum est) ut R^2-r^2, R^2-4r^2, R^2-9r^2, &c, (hoc est, juxta nostram Arithmeticam Infinitorum, ut series Æqualium dempta serie Secundanorum, quæ ad correspondentem seriem Æqualium, est ut $1-\frac{1}{3}$ ad 1, hoc est ut $\frac{2}{3}$ ad 1, sive ut 2 ad 3; quæ itaque est ratio Hemisphærii ad circumscriptum Cylindrum;) sintque eorundem Circulorum distantiæ à centro sphæræ, ut $r, 2r, 3r$, &c, nempe series Primanorum:

Hæc diſtantiarum ſeries in ſeriem magnitudinum reſpective ducta, dat ſeriem $rR^2 - r^3$, $2rR^2 - 8r^3$, $3rR^2 - 27r^3$, &c; hoc eſt ſeriem Primanorum dempta ſerie Tertianorum, quæ ad correſpondentem ſeriem Æqualium eſt ut $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ ad 1, hoc eſt ut $\frac{1}{4}$ ad 1, ſive ut 1 ad 4. Quæ quidem ſeries cum ſit momentis dictorum Circulorum reſpectu Centri ſphæræ proportionales, (quorum utique rationes ſunt ex rationibus magnitudinum & diſtantiarum compoſitæ;) erunt eorundem omnium in ſuis locis momenta, ad momenta totidem maximo æqualium in maxima diſtantia; hoc eſt, momentum Hemiſphærii in ſuo ſitu, ad momentum circumſcripti Cylindri ex puncto C ſuſpenſi, (reſpectu centri G;) ut 1 ad 4. Eſt autem magnitudo ad magnitudinem (quod jam oſtenſum eſt) ut 2 ad 3: Ergo, propter $\frac{2}{3}$) $\frac{1}{4}$ ($\frac{3}{8}$, diſtantia ad diſtantiam, ut 3 ad 8. Diſtat itaque centrum gravitatis Hemiſphærii a centro Sphæræ, $\frac{3}{8}$ Radii. Ut prius.

72. Et ſimili proceſſu (juxta utramvis methodum) de centro gravitatis in aliis Sphæræ partibus judicandum eſt. Nempe idem eſſe centrum gravitatis Segmenti Sphærici plano z z abſciſſæ, atque ſegmenti ſic excavati Cylindri eodem plano abſciſſæ. Sed & ſimiliter judicandum eſt de centro ſegmenti Sphærici duobus planis axi rectis interjecti: Et quidem ſive in eodem ſint ſive in oppoſitis Hemiſphæriis ea plana; ſi & circa reliquum Hemiſphærium conſtituatur Cylindrus ſimiliter excavatus. Cum itaque tum Cylindri, tum allati Coni vel fruſti conici magnitudines & centra gravitatis non ignorentur; nec ignorabitur centrum gravitatis figuræ excavatæ, adeoque nec Segmenti Sphærici planis quibuſcunque parallelis abſciſſi.

73. Datis autem ſegmenti Sphærici z z C (ſive Hemiſphærium ſit, ſive majus aut minus hemiſphærio) tum magnitudine tum centro gravitatis; ſi eidem adjiciatur, vel auferatur, conus z z G, vel zzF, vel aliud quodvis ſolidum cujus tum magnitudo tum centrum gravitatis innoteſcunt; dabitur & aggregati vel reſidui centrum gravitatis. Et quidem, quantum ad Sectores Sphæricos, ut G z z C, ſunt illi reſpectivis ſuperficiei Sphærici ſegmentis z z C, adeoque & Y C rectis, proportionales; (æquales utique $\frac{1}{3}$ Radii in illam ſuperficiem ducto:) Suorumque centrorum gravitatis a centro circuli diſtantiæ, ſunt rectis G E (ſi intelligatur E punctum medium inter C & Y) proportionales;

æquales

æquales utique $\frac{3}{4}$ G E. Idem nempe erit centrum gravitatis Sectoris Sphærici G z z C, atque segmenti superficiei sphæricæ segmento z z C similis & concentrici radium habentis $\frac{3}{4}$ G C. Ut enim E (punctum medium rectæ C Y) est centrum gravitatis segmenti Superficiei sphæricæ z z C (propter segmenta superficiei sphæricæ segmentis Axis iisdem planis abscissis ubique proportionalia;) ita Segmenti similis concentrici radium habentis $\frac{3}{4}$ G C (cujus singula puncta, utpote conorum vel pyramidum totidem æqualium Sectorem Sphæricum complentium centra gravitatis, æqualiter onerari intelligenda sunt) centrum gravitatis erit in suo radico similiter situm. Quod ipsum est & centrum gravitatis Sphærici Sectoris, sive pyramidum simul omnium numero infinitarum Sectorem illum complentium.

74. Quam superius (§ 30) suscepimus rationem, 9 A F q — 4 C F q ad 2 C F q, ostendendum; eam sic investigamus. Primo quidem cum Trilineum C Z A F z fig. 1. in Semicycloide (propter Semicirculi interpositionem inter trilineum illud ejusque axem C F) sit distortum; intelligamus (exempto semicirculo) *trilineum illud restitui* in situm debitum, protrusis scilicet omnibus Z z ad rectam C F, ut puncta z coincidant punctis Y: & sic ubique. (Quod tantundem est atque superficiem curvam trilineam T ζ F z C fig. 2. in planum expandere.) Quo facto, rectæ ζ Z &c prius inclinatæ in Fig. 1. erigentur ut in Fig. 7. Exemptis nempe Trapeziorum omnium Triangulis (quæ Triangulis Semicirculi ubique æquantur) manebunt tantum Parallelogramma, Triangulorum illorum dupla: puta Parallelogrammum V P ν β in *Trilineo restituto*, duplum Trianguli υ F p in Semicirculo, (& sic ubique:) Ut eadem jam sit ratio omnium z Z in hæc respectiva Parallelogramma, ad omnes z Y in eadem Parallelogramma; atque prius in sua respectivè Triangula, vel horum eorumve altitudines.

Momentum semicycloidis respectu Axis, & solidum conversione circa Axem factum.

Fig. 7.

75. Cum, sumptis Y, y, æqualiter utrinque à centro G remotis, altitudines binæ F y FY simul sumptæ æquent ubique F C, sintque z Y m y æquales; erit ubique z Y × F Y + m y × F y = z Y × F C. Sive, quod tantundem est, quadrilineum M μ λ L una cum quadrilineo Z ζ ν N, complent Parallelogrammum basis ζ ν altitudinis F C, (altero scilicet supplente quod in altero deest.) Adeoque perinde est sive ducamus omnia Parallelogramma

rallelogramma vel Quadrilinea Trilinei restituti C Z A F in omnes respectivè rectas z Y totius Semicirculi, sive omnia minuta Parallelogramma Parallelogrammi Cβ in omnes respective rectas z Y unius quadrantis; hoc est, in omnes sinus rectos arcuum arithmetice proportionalium in Quadrante; hoc est, in omnes respectivè rectas, æqualibus intervallis sumptas, trilinei C B b ipsi C b parallelas, incipiendo a B (quod statim ostendetur.) Hoc
Fig.7. est, perinde est sive super base A F κ, erigamus figuram altitudinum respectivè earundem cum trilineo restituto C A F: sive super base F β κ, hoc est B b C, figuram altitudinis C F ubique; (posito nimirum figuras tum A β κ, tum F β κ, figuræ B b C congruere.) Quod autem rectæ Trilinei C B b sint arcuum arithmetice proportionalium Sinus recti, sic constat: Cum enim propter tum Semiperipheriam C b F, tum rectam A F, in partes æquales divisam, omnes F Y, hoc est omnes ζ Z (trilinei C A F fig. 7.) sint sinus versi arcuum F z arithmetice proportionalium totius Semiperipheriæ; erunt similiter omnes G Y (earundem excessus supra semidiametrum) hoc est, omnes rectæ trilinei BbC, arcuum b z arithmetice proportionalium in b C quadrante, Sinus recti; (uti &, eâdem ratione, G y defectus rectarum F Y sive F y a radio, hoc est rectæ trilinei similis B b F, sunt sinus recti arcuum arithmeticè proportionalium quadrantis b F:) quod suscepimus ostendendum.

76. Est autem (ut calculus § 23 indicabit) prismatis modo dicti, basis B b C, æqualis R^2 quadrato radii circuli generantis. [Nam si ponatur punctum Y fig. 1. in centro circuli, ut G, erit tum F Y $=$ R, tum z Y $=$ R, & z Z $=$ z C $= \frac{1}{4} P$; adeoque Z Y $=$
Fig.1. $R + \frac{1}{4} P$, quæ si in $\frac{1}{2} R$ ducatur, habetur $\frac{1}{2} R^2 + \frac{1}{8} R P$ magnitudo quadrilinei ζ Z C F, hoc est, in hoc casu, quadrilinei βBCF, fig. 1. unde si auferamus trapezium β B G F, hoc est, tum parallelogrammum β B b F $=$ G F $\times$ β F $= R \times \frac{1}{4} P = \frac{1}{4} R P$, tum triangulum F b G $=$ G F $\frac{1}{2}$ b G $= R \times \frac{1}{2} R = \frac{1}{2} R^2$, manebit $R^2 + \frac{1}{8} RP$ magnitudo segmenti C G B; unde si iterum subducamus quadrantem C b G $= \frac{1}{8} R P$, manebit R^2 magnitudo trilinei C b B fig. 1. hoc est C b B fig. 7.] Quæ quidem basis B b C $= R^2$ in alti-
Fig.7. tudinem F C $= 2 R$ ducta, dat $2 R^3$ mensuram dicti Prismatis; sive aggregatum omnium z Y in respectiva parallelogramma ductarum. Si autem pro omnibus z Y, substituamus ubique periphe-

pherias his radiis (convertendo) descriptas; pro $2 R^3$, prodibit $2 R^2 P$. [Quod quidem est triplum Sphæræ circuli genitoris: (quod hinc oritur, quia tum parallelogramma V β ν P sunt triangulorum ν F p dupla, tum z Y distantia mediæ basis trianguli, est $\frac{4}{3}$ distantiæ centri gravitatis Trianguli a conversionis axe C F; adeoque $\frac{3}{2} \times 2 = 3$:) Sicut &, iisdem de causis $2 R^3$, triplum Momenti Semicirculi respectu rectæ C F, est Momentum omnium parallelogrammorum sic suspensorum. Quod & in solidis, mutatis mutandis, perinde valet. Verbi gratia. Si intelligatur tum super Trilineo restituto C A F, tum super semicirculo CbF, insistere corpus Cylindricũ sive Prismaticum eodem plano oblique sectum, ita ut in puncto F & recta A F altitudinem habeat nullam, & in C maximam; atque intelligantur singula prismata parallelogrammis ut V β ν P incumbentia suspendi in distantiis z Y respective: erunt eorum omnium Prismatum sic suspensorum pondus, ad pondus pyramidum triangulis ν F p incumbentium, hoc est ad pondus portionis cylindri semicirculo insistentis, respectu rectæ C F; ut 2 ad 1. Cum enim Parallelogrammorum Prismata sint sigillatim ad Triangulorum Pyramides, ut 3 ad 2; atque z Y distantia suspensi Prismatis, sive distantia mediæ basis Pyramidis, est ad distantiam centri gravitatis istius Pyramidis, ut 4 ad 3; erit quæ ex his componitur ratio 2 ad 1. (propter $\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2$.) Adeoque pondus sic suspensorum Prismatum, erit ponderis Pyramidum in suo situ, hoc est ponderis dictæ portionis cylindri, (respectu rectæ C F,) duplum. Et similiter alibi. Sed hæc obiter hic loci, quorum tamen usus esse poterit in sequentibus. Redimus ad suspensa Parallelogramma.]

77. Si vero eadem trilinei restituti CAF Parallelogramma V β ν P fig. 7. ducantur in omnes respective rectas z Z arithmetice proportionales (quippe arcubus arithmetice proportionalibus æquales:) hoc est in omnes parallelas rectas Trianguli F A α (quarum maxima A α = A F;) habebitur portio Prismatis, basin C A F altitudinem A α habentis, oblique abscissa plano per basis lineam C F & verticis punctum α transeunte; (quæ quidem portio exhibebit momentum dicti trilinei C A F respectu rectæ C F.) Sin pro trianguli rectis A α &c (ut pridem pro rectis β κ &c) sumantur aliæ quæ ad has sint ut peripheriæ circuli ad ejusdem

 radium;

radium; abscissa prismatis portio æqualis erit solido ex Trilinei C A F conversione circa C F facta; (tunc enim Triangulum F A α æquale fiet circulo radii F A ; reliquaque respective triangula reliquis circulis parallelis :) Quod solidum, tantisper dum illius magnitudo innotescat, appellabimus A^3.

78. Solidum igitur ex omnibus Triangulis v F p &c, vel Parallelogrammis V β v P &c in respectivas rectas zZ, vel peripherias his radiis descriptas ; ad solidum ex iisdem triangulis vel parallelogrammis in respectivas rectas z Y, vel peripherias his radiis descriptas ; est ut A^3, ad $2\ R^2P$, (per § 76, 77:) Adeoque noncuplum istius ad duplum hujus ut $9\ A^3$ ad $4\ R^2P$: Cui si addatur ratio 5 ad 2, sive $10\ R^2P$ ad $4\ R^2P$; habebitur ratio solidi ex conversione Semicycloidis, ad solidum ex conversione Semicirculi, (circa axem C F,) ut $9\ A^3 + 10\ R^2P$ ad $4\ R^2P$, per § 30.

79. Porro, eorundem Solidorum ad invicem ratio sic alias colligitur. Solidum ex conversione Semicycloidis (Fig. 1. vel 8.) ad Solidum ex conversione Semicirculi, (circa axem C F,) est, ut omnes circuli radiorum Z Y (æqualibus ab invicem intervallis sumptorum,) ad omnes circulos radiorum z Y respective ; hoc est, ut omnia quadrata ZY, ad omnia quadrata z Y ; hoc est, ut omnia z Z q + 2 ▯ Zz Y + z Y q ad omnia z Y q.

Fig. 8.

80. Sed omnia z Y q (per prop. 133, 135. *Arithm. Infin.*) æquant $\frac{1}{6}\ D^3$, vel $\frac{4}{3}\ R^3$. (Sunt enim omnes ordinatim applicatæ in semicirculo, ut series $\sqrt{} : aD - a^2$: adeoque earum quadrata, ut series $aD - a^2$: quæ est ad seriem æqualium, nempe D^2 toties sumptum, hoc est, ad D^3 ; ut $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, ad 1 ; sive ut 1 ad 6.)

81. Item omnia rectangula Z z Y, æquantur solido cylindrico, basem habenti semicirculum C b F, altitudines vero z Z respective sumptas, hoc est (propter z Y = m y, & Z z + M m = A F = N n + L l, &c,) solido Cylindrico habenti basin G b F quadrantem, altitudinem vero ubique A F ; hoc est $\frac{1}{16} RP^2$:(quod fit ex $\frac{1}{8} RP$ quadrante circuli genitoris, in A F = $\frac{1}{2} P$ ducto:) Adeoque omnium rectangulorum dupla, sive 2 ▯ Z z Y, sunt $\frac{1}{8} RP^2$.

82. Sunt igitur $\frac{4}{3} R^3 + \frac{1}{8} RP^2$ (hoc est, omnia z Y q + 2 ▯ ZzY,) una cum omnibus z Z q, æqualia omnibus quadratis Z Y. Et (pro radiorum quadratis substituendo circulos, hoc est, dividen-

do

do per R & multiplicando per $\frac{1}{2}P$,) erunt $\frac{2}{3}R^2P + \frac{1}{16}P^3$ una cum omnibus circulis radiorum z Z (æqualibus intervallis sumptorum,) hoc est, una cum solido ex conversione trilinei restituti C A F fig. 7. circa C F, hoc est una cum A^3; nempe $\frac{2}{3}R^2P + \frac{1}{16}P^3 + A^3$, æqualia solido ex conversione semicycloidis circa C F: cujus itaq; ratio ad sphæram circuli genitoris (ex conversione semicirculi circa eandem rectam C F factam) est ut $\frac{2}{3}R^2P + \frac{1}{16}P^3 + A^3$ ad $\frac{2}{3}R^2P$.

83. Verum eadem ratio superius reperta est (§ 78) ut $9A^3 + 10R^2P$ ad $4R^2P$, hoc est (dividendo utrinque per 6,) ut $\frac{3}{2}A^3 + \frac{5}{3}R^2P$ ad $\frac{2}{3}R^2P$: quam jam reperimus (§ 82) ut $\frac{2}{3}R^2P + \frac{1}{16}P^3 + A^3$ ad $\frac{2}{3}R^2P$. Sunt igitur $\frac{3}{2}A^3 + \frac{5}{3}R^2P = \frac{2}{3}R^2P + \frac{1}{16}P^3 + A^3$. Adeoque (subductis utrinque æqualibus) $\frac{1}{2}A^3 + R^2P = \frac{1}{16}P^3$. Hoc est, $A^3 = \frac{1}{8}P^3 - 2R^2P$. (Hoc est A F in AFq − C Fq. fig. 1 vel 8.) Habemus itaque magnitudinem solidi ex conversione Trilinei restituti CAF fig. 7. circa C F, (nempe $\frac{1}{8}P^3 - 2R^2P$;) Adeoque ipsius rationem ad Sphæram circuli genitoris (hoc est, ad $\frac{2}{3}R^2P$,) nempe ut $\frac{1}{8}P^2 - 2R^2$ ad $\frac{2}{3}R^2$, sive ut $\frac{3}{4}P^2 - 12R^2$ ad $4R^2$, hoc est, ut 3 A F q − 3 C F q ad C F q. [Atque eadem est ratio momenti istius Trilinei, ad momentum semicirculi, respectu C F rectæ. Est utique illud $\frac{1}{8}RP^2 - 2R^3$; (momentum autem Semicirculi $\frac{2}{3}R^3$:) Adeoque (dividendo per magnitudinem Trilinei $\frac{1}{2}RP$) distabit centrum gravitatis Trilinei ab F C, $\frac{1}{4}P - \frac{4R^2}{P}$; & à β B, $\frac{4R}{P}R$. Distat autem (per superius tradita) ab A F, $\frac{3}{4}R$: Cum enim momentum Trilinei ad momentum Semicirculi (respectu A F rectæ) sit ut 3 ad 2, & magnitudo ad magnitudinem ut 2 ad 1; erit propter $\frac{3}{1}$) $\frac{3}{2}$ ($\frac{3}{4}$, distantia ad distantiam ut 3 ad 4. Distantia autem centri gravitatis semicirculi, est R; Ergo distantia centri gravitatis Trilinei ab A F est $\frac{3}{4}R$.]

84. Cum igitur $\frac{2}{3}R^2P$ æquetur Sphæræ circuli genitoris; erit (per § 82) $\frac{2}{3}R^2P + \frac{1}{16}P^3 + A^3$, hoc est, $\frac{2}{3}R^2P + \frac{1}{16}P^3 + \frac{1}{8}P^3 - 2R^2P$, hoc est $\frac{3}{16}P^3 - \frac{4}{3}R^2P$, æquale solido ex conversione Semicycloidis circa rectam C F.

85. Vel etiam (per § 78,) cum ejusdem solidi ad Sphæram ratio, sit, ut $9A^3 + 10R^2P$ ad $4R^2P$, hoc est, ut $\frac{3}{2}A^3 + \frac{5}{3}R^2P$ ad $\frac{2}{3}R^2P$; sitque $\frac{2}{3}R^2P$ æquale Sphæræ: erit etiam $\frac{3}{2}A^3 + \frac{5}{3}R^2P$, hoc

hoc est $\frac{3}{16}P^3 - 3R^2P + \frac{5}{3}R^2P$, hoc est $\frac{3}{16}P^3 - \frac{4}{3}R^2P$, æquale solido ex conversione Semicycloidis circa rectam C F, ut prius.

86. Simiter, cum (per § 78) ratio omnium z Z arithmetice proportionalium, in respectiva Triangula *v* F p, ad correspondentes omnes z Y in eadem Triangula, sit ut A^2 ad $2R^2P$; hoc est, $\frac{1}{8}P^3 - 2R^2P$ ad $2R^2P$, sive, ut $\frac{1}{8}P^2 - 2R^2$ ad $2R^2$ vel $\frac{1}{4}P^2 - 4R^2$ ad $4R^2$; (hoc est, ut AFq – CFq ad CFq:) Adeoque noncuplum illius ad duplum hujus, $9A^2$ ad $4R^2P$; hoc est, ut $\frac{9}{8}P^3 - 18R^2P$ ad $4R^2P$, sive ut $\frac{9}{4}P^2 - 36R^2$ ad $8R^2$; (hoc est ut 9 A F q – 9 C F q ad 2 C F q:) Si adjungatur ratio 5 ad 2, sive $20R^2$ ad $8R^2$: Habetur iterum ratio $\frac{9}{4}P^2 - 36R^2 + 20R^2 = \frac{9}{4}P^2 - 16R^2$, ad $8R^2$: Hoc est 9 A F q – 4 C F q ad 2 C F q. Quod supra (§ 30) suscepimus demonstrandum.

Momentum solidi circa A F respectu C F, & circa C F respectu rectæ A F.

Fig. 7.

87. Ostensum est supra (§ 46,) Momentum solidi ex conversione (vel semiconversione) Semicycloidis circa A F (fig. 1.) respectu rectæ C F, ad momentum solidi annularis ex conversione, (vel semiconversione) semicirculi C b F circa eandem A F respectu ejusdem C F rectæ; esse, ut 7 ad 3, atque insuper ut *decuplum* momenti solidorum ex tali conversione Triangulorum *v*Fp in distantiis z Z suspensorum, ad *triplum* momenti eorundem solidorum in distantiis z Y respective suspensorum. Cujus rationis investigationem sic aggredimur. Omnes z Z (æquales arcubus in semicirculo arithmetice proportionalibus) in respectiva solida ex sic conversis triangulis *v* F p, ad omnes z Y (arcuum illorum sinus rectos) in eadem respective solida; Hoc est (propter *v* p ubique æquales) omnes illæ z Z in quadrata altitudinum F Y (hoc est, sinuum versorum residuorum arcuum,) ad omnes illas z Y in eadem respective quadrata; sunt, ut momenta omnium circulorum (vel cylindrulorum) Z ζ (æqualibus intervallis sumptorum) conversione trilinei restituti C A F fig. 7. circa A F factorum, suspensorum in distantiis ζ Ξ (trianguli F A *α*) hoc est z Z (trilinei restituti;) ad momenta eorundem circulorum (vel cylindrulorum) suspensorum in distantiis ζ ξ (bilinei F *α x*;) Hoc est, ut momentum solidi ex conversione Trilinei restituti C A F (circa A F) respectu rectæ C F, ad *duplum* momenti annuli ex simili conversione C b F semicirculi, respectu C F rectæ. (Dico, ad *duplum* momenti annuli; propter, tum magnitudinem solidi ex conversione Parallelogrammi in trilineo, ad magnitudinem solidi

ex

ex conversione correspondentis Trianguli in semicirculo, ut 3 ad 2 ; tum zY distantiam mediæ basis, ad distantiam centri gravitatis solidi ex triangulo sic converso, ut 4 ad 3 : Est autem $\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2$.) Adeoque *decuplum* omnium zZ in dicta solida vel quadrata, ad *triplum* omnium ZY in eadem solida vel quadrata ; erit, ut *decuplum* momenti solidi ex conversione Trilinei restituti (circa A F) respectu rectæ C F ad *sextuplum* momenti solidi ex simili conversione semicirculi respectu C F rectæ ; sive, ut *quintuplum* illius, ad *triplum* hujus.

88. Est autem Annulus conversione Semicirculi factus, $\frac{1}{4}RP$, (ex ductu nempe semicirculi $\frac{1}{4}RP$ in P peripheriam centri conversione descriptam;) qui quidem ductus in $\frac{8R^2}{3P}$ (distantiam centri gravitatis semicirculi, adeoque & annuli semicirculi conversione facti, à recta C F,) dat $\frac{2}{3}R^3P$, momentum annuli respectu rectæ C F : (cujus itaque triplum est $2R^3P$.) Momentum autem solidi conversione Trilinei restituti CAF circa A F, respectu C F rectæ, dicamus aliquantisper B^4. Quintuplum igitur hujus, ad Triplum illius, est ut $5B^4$ ad $2R^3P$: Cui rationi si adjungatur ratio 7 ad 3, sive $\frac{14}{3}R^3P$ ad $2R^3P$, habetur ratio momenti solidi ex conversione Semicycloidis ad momentum solidi ex conversione semicirculi (circa AF) respectu rectæ CF; nempe $5B^4 + \frac{14}{3}R^3P$ ad $2R^3P$, vel $15B^4 + 14R^3P$ ad $6R^3P$.

89. Sed (quod § 64 dictum est) eadem plane ratio est momenti, respectu rectæ A F, solidi ex conversione (vel semiconversione) Semicycloidis circa C F, ad momentum solidi ex simili conversione (vel semiconversione) semicirculi, respectu ejusdem AF lineæ æquilibrii. Quod hinc evenit, quia eædem rationes utrobique componuntur ; cum hoc saltem discrimine, quod duæ magnitudines reciprocantur ; nempe Z Y quæ in hoc solido ingreditur compositionem solidi, in altero notat distantiam à linea æquilibrii ; contra verò recta F Y.

90. Hæc autem eadem ratio sic alias colligitur. Nempe (sumptis rectis ZY fig. 8. æqualiter ab invicem distantibus,) momentum illud solidi ex conversione Semicycloidis, ad momentum solidi ex simili conversione Semicirculi, est ut momentum omnium Circulorum radiis Z Y descriptorum, ad momentum omnium circulorum descriptorum radiis zY; hoc est, ut momentum om-

nium zZq + 2 ▯ Z zY+zYq, ad momentum omnium z Y q,(reſpectu ejuſdem AF rectæ:) Hoc eſt, ut momentum (reſpectu ejuſdem AF rectæ)ſolidi ex converſione trilinei reſtituti CAF fig. 7. circa C F (quod, propter quantitatum reciprocationem, æquipollet iſti quod jam diximus B^4) una cum momento ſolidi ex ſemicirculo ſic converſo (quod æquipollet nuper invento $\frac{2}{3} R^3 P$, § 88) atque inſuper momento ſolidi ex converſione plani cujus rectæ ſint mediæ proportionales inter Zz zY (quod dicamus C^4) bis ſumpto ; ad momentum ſphæræ ex ſimili converſione ſemicirculi , reſpectu ejuſdem AF rectæ: Hoc eſt , ut $B^4 + 2C^4 + \frac{2}{3}R^3 P$ ad $\frac{2}{3} R^3 P$.

91. Cum igitur hæc ratio $B^4 + 2 C^4 + \frac{2}{3} R^3 P$ ad $\frac{2}{3} R^3 P$ (§ 90) hoc eſt, $9 B^4 + 18 C^4 + 6 R^3 P$ ad $6 R^3 P$, eadem ſit atque illa (§ 88,) $15 B^4 + 14 B^3 P$ ad $6 R^3 P$; erit $9 B^4 + 18 C^4 + 6 R^3 P = 15 B^4 + 14 B^3 P$; adeoque $18 C^4 = 6B^4 + 8 R^3 P$, ſive $9 C^4 = 3 B^4 + 4R^3 P$. Hoc eſt, $C^4 = \frac{1}{3} B^4 + \frac{4}{9} R^3 P$. Unde cognito vel B^4 vel C^4, reliquum cognoſcetur.

92. Ut autem habeamus B^4, hoc eſt, momentum ſolidi ex converſione Trilinei reſtituti C A F fig. 7. circa A F, reſpectu rectæ C F, (vel circa C F, reſpectu A F, quæ tantundem ſunt:) Primò pro omnibus circulis radiorum ζ Z, ſubſtituamus totidem triangula rectangula ſuper ipſas ζ Z baſes conſtituta, & altitudines (in ipſis Z punctis) baſibus æquales habentia ; adeoque portionem priſmatis plano oblique ſecti complentia, baſin habentis trilineum illud C A F, altitudinem verò in A F nullam, ſed continuè creſcentem donec ad punctum C altitudinem obtineat æqualem ipſi F C rectæ ; adeoque ad ſingula baſis puncta altitudinem habeat æqualem eorundem ab A F diſtantiæ. Quæ quidem Triangula, tum magnitudine, tum & momento reſpectu C F rectæ, ſunt reſpectivis illis circulis proportionalia.

93. Deinde in hujus priſmaticæ portionis baſi C A F, duci intelligamus curvam B F, curvis B C & B A omnino ſimilem. Cui B F curvę, intelligatur erecta ſuperficies curva inſiſtere, dirimens portionem illam priſmatis in duo ſegmenta ; quorum alterum trilineo B F A, alterum trilineo B F C, inſiſtant. Quorum ſegmentorum momentum, reſpectu C F rectę, ſic ſeorſim inquirimus.

94. Eſt

94. Est utique (per § 23. ut supra § 76 ostensum est) Trilineum BbC $= R^2$: adeoque Trilineum B F C (quippe istius duplum) $2 R^2$. Hujus autem centrum gravitatis in recta B b jacere, manifestum est; adeoque ipsius ab A F distantia est $R =$ b F. Quę quidem distantia R in magnitudinem $2 R^2$ ducta, dat $2 R^3$, momentum dicti trilinei B F C, respectu A F rectæ: (Adeoque æquale planè ejusdem momento respectu B b, ut ex §. 99 patet.) Sed & (propter portionis altitudines, ut dictum est, distantiis punctorum quibus insistunt ab A F æquales; adeoque altitudinem super basis centrum gravitatis, æqualem rectæ bF$=$R;) idem $2 R^3$ est magnitudo prismaticæ portionis trilineo BFC insistentis.

95. Est autem totius C A F trilinei, momentum respectu A F, (adeoque & prismaticæ portionis toti insistentis magnitudo,) $\frac{1}{2} R^2 P$; (nempe $\frac{1}{2}$ momenti semicirculi, per § 24.) unde si auferatur momentum trilinei B F C, hoc est $2 R^3$, (per præced.) manebit $\frac{1}{2} R^2 P - 2 R^3$ momentum trilinei B F A respectu ejusdem A F rectæ: (unde, si opus est, colligetur distantia centri gravitatis dicti Trilinei BFA ab AF recta, nempe $\frac{3P - 16R}{4P - 16R} R$ quod provenit ex divisione momenti $\frac{1}{8} R^2 P - 2 R^3$ per trilinei magnitudinem $\frac{1}{4} RP - 2 R^2$; adeoque ejusdem centri a B b distantia, est $\frac{P}{4P - 16R} R$; quæ nempe cum illa altera complet rectam B $\beta = R$.) Quod ipsum $\frac{1}{8} R^2 P - 2 R^3$ (ob causam modo dictam) est etiam magnitudo portionis prismaticæ eidem BFA trilineo insistentis.

96. Hujus autem prismaticæ portionis (trilineo B F A insistentis) centrum gravitatis in recta B β jacere, manifestum est. Est itaque ejusdem a C F distantia, β F $= \frac{1}{4} P$. Quæ quidem distantia in portionis magnitudinem $\frac{1}{8} R^2 P - 2 R^3$ ducta, dat $\frac{1}{32} R^2 P^2 - \frac{1}{2} R^3 P$, momentum dictę portionis (trilineo BFA insistentis) respectu CF rectæ.

97. Porro, cum (per § 94) portio prismatis trilineo B F C insistentis sit $2 R^3$; æquipolleat autem, tum magnitudine tum & momento respectu C F rectæ, prismati super eadem base, altitudinem mediam habenti; hoc est, ęqualem ei quam habet dicta portio super basis suæ centrum gravitatis, hoc est, altitudi-

 nem

nem R: Centrum gravitatis dictæ portionis tantundem a CF recta distabit (seu potius ab æquilibrii plano super hanc rectam erecto; quod hic nobis loci perinde est; quod & similiter alibi ubi opus est intellectum volo,) quantum inde distat centrum gravitatis æquipollentis prismatis; hoc est, quantum ab eadem CF distat centrum gravitatis Trilinei BFC. Quod quantum sit, sic inquirimus.

98. Trilineum, totum CAF, est $\frac{1}{2}RP$ (nempe duplum Semicirculi, per § 22) unde si auferamus trilineum BFC, hoc est, $2R^2$ (per § 94) manebit $\frac{1}{2}RP - 2R^2$ æquale trilineo BFA; cujus trilinei centrum gravitatis (in recta Bβ situm) a recta CF distat $\frac{1}{4}P$. Quæ distantia, in $\frac{1}{2}RP - 2R^2$ magnitudinem ducta, dat $\frac{1}{8}RP^2 - \frac{1}{2}R^2P$, momentum trilinei BFA respectu CF rectæ.

Fig. 7.

99. Totius autem CAF trilinei respectu ejusdem CF, momentum, est $\frac{1}{8}RP^2 - 2R^3$; (per § 83; cum enim solidum ex conversione circa CF, sit $\frac{1}{8}P^3 - 2R^2P$; erit, substituendo radios pro peripheriis, $\frac{1}{8}RP^2 - 2R^3$ momentum plani.) Unde si auferamus $\frac{1}{8}RP^2 - \frac{1}{2}R^2P$ (momentum trilinei BFA, per præced.) manebit $\frac{1}{2}R^2P - 2R^3$ momentum trilinei BFC. Quod momentum si per trilinei magnitudinem $2R^2$ dividatur, prodibit $\frac{1}{4}P - R$ distantia centri gravitatis dicti Trilinei BFC a recta CF. (adeoque R ejusdem distantia a puncto B.)

100. Cum igitur distantia centri gravitatis, tum BFC trilinei, tum & (§ 97) portionis trilineo huic insistentis, a CF, sit $\frac{1}{4}P - R$; sitque dictæ portionis magnitudo (per § 94) $2R^3$: Erit istius, respectu CF, momentum $\frac{1}{2}R^3P - 2R^4$.

101, Huic itaque momento, si adjungamus $\frac{1}{32}R^2P^2 - \frac{1}{2}R^3P$ (momentum portionis trilineo BFA insistentis, respectu rectæ CF, per § 96,) habetur $\frac{1}{32}R^2P^2 - 2R^4$ momentum totius portionis trilineo CAF insistentis, respectu rectæ CF. Sin porro, pro triangulis § 92 substitutis, restituamus circulos, (dividendo per R, & multiplicando per P,) habebitur $\frac{1}{32}RP^3 - 2R^3P = B^4$, momentum solidi ex conversione trilinei CAF circa AF, respectu rectæ CF. Quod § 92 proponitur inquirendum.

102. Invenimus autem (§ 88) momentum solidi ex conversione semicycloidis, ad momentum solidi ex conversione semicirculi (circa AF) respectu rectæ CF; esse, ut 15 B^4 + 14 R^3P ad

6 R

$6R^3P$; sive ut $\frac{5}{3}B^4+\frac{14}{9}R^3P$ ad $\frac{2}{3}R^3P$: Hoc est, (propter $B^4=\frac{3}{32}RP^2-2R^3P$,) ut $\frac{5}{32}RP^2-\frac{10}{3}R^3P+\frac{14}{9}R^3P=\frac{5}{32}RP^2-\frac{16}{9}R^3P$, ad $\frac{2}{3}R^3P$. (Quod § 46, 87, suscepimus ostendendum.) Est autem $\frac{2}{3}R^3P$ momentum annuli ex ea conversione semicirculi: Ergo & $\frac{5}{32}RP^2-\frac{16}{9}R^3P$ est momentum solidi ex dicta conversione semicycloidis (circa A F) respectu ejusdem CF. Quod momentum si per solidi magnitudinem $\frac{5}{8}RP^2$ (per § 24) dividatur, prodibit $\frac{1}{4}P-\frac{128R^2}{45P}$ distantia centri gravitatis dicti solidi (ex conversione semicycloidis circa A F) a recta C F : (adeoque $\frac{128R^2}{45P}$, ejusdem centri distantia a recta Bβ.)

103. Si vero intelligatur idem Semicycloidis planum circa C F converti ; momentum solidi inde facti respectu A F rectæ, (propter magnitudinum & distantiarum reciprocationem,) idem plane erit atque momentum jam inventum solidi ex ejusdem plani circa A F conversione, respectu rectæ C F, (ut supra § 64 & 89 dictum est:) nempe $\frac{5}{32}RP^2-\frac{16}{9}R^3P$. Quod momentum, si per magnitudinem dicti solidi dividatur, hoc est, per $\frac{3}{16}P^3-\frac{4}{3}R^2P$ (per § 85) prodibit $\frac{45P^2-512R^2}{54P^2-384R^2}R$, distantia centri gravitatis istius solidi a recta A F. (vel $\frac{9P^2+128R^2}{54P^2-384R^2}R$. ejusdē distantia a BG.)

104. Possunt hæc eadem item inferri ex § 90. Cum enim ratio momenti solidi ex conversione Semicycloidis, ad momentum solidi ex conversione Semicirculi, circa A F ut axem, respectu C F ut lineæ æquilibrii ; vel, circa C F ut axem, respectu A F ut lineæ æquilibrii ; ibidem esse ostenditur, ut $B^4+2C^4+\frac{2}{3}R^3P$ ad $\frac{2}{3}R^3P$; hoc est, (propter $B^4=\frac{3}{32}RP^2-2R^3P$, per § 101, & $C^4=\frac{1}{3}B^4+\frac{4}{9}R^3P$, per § 91 ; adeoque $2C^4=\frac{2}{3}B^4+\frac{8}{9}R^3P=\frac{2}{32}RP^2-\frac{4}{3}R^3P+\frac{8}{9}R^3P=\frac{1}{16}RP^2-\frac{4}{9}R^3P$,) ut $\frac{5}{32}RP^2-\frac{16}{9}R^3P$ ad $\frac{2}{3}R^3P$; (omnino ut supra § 102:) Habentur inde tum solidorum momenta, tum centrorum gravitatis distantiæ a respectivis æquilibrii lineis, eodem plane modo quo § 102, 103.

105. Sed & simul colligitur tum momentum (respectu rectæ AF) tum centri gravitatis distantia, solidi cujus omnia plana sunt ipsa ZzY rectangula, hoc est solidi cylindrici basin habentis

ſemicirculum C b F, altitudines vero Zz (fig.7.vel 8.) reſpective. Cum enim (§ 90) ponatur C^4 momentum ſolidi ex circulis radiorum $\sqrt{:}\, Zz \times zY$: qui ſunt itaque ad rectangula ZzY vel Zz× zY, ut circulus ad quadratum radii, hoc eſt ut $\frac{1}{2}P$ ad R, ſive ut P ad $2R$; ſitque (per præced.) $C^4 = \frac{1}{3}B^4 + \frac{4}{9}R^3P - \frac{1}{32}RP^3 - \frac{2}{9}R^2P$: Si pro circulis ſubſtituantur radiorum quadrata (dividendo per P & multiplicando per $2R$,) habebitur $\frac{1}{16}R^2P^2 - \frac{4}{9}R^4$ momentum dicti ſolidi (ex omnibus Z z Y rectangulis) reſpectu rectæ A F. Eſt autem ſolidi hujus magnitudo $\frac{1}{16}RP^2$ (æqualis utique Cylindro quadrantali, cujus baſis b G F quadrans,
Fig.8. altitudo F A $= \frac{1}{2}P$; vel Semicylindro cujus baſis CbF Semicirculus, altitudo $\frac{1}{2}$AF $= \frac{1}{4}P$: propter duas ubique altitudines, a medio utrinque æque remotas, rectæ F A ſimul æquales:) Per quam magnitudinem ſi dividatur momentum, prodibit, $R - \frac{64R^3}{9P^2}$ diſtantia centri gravitatis a recta A F: adeoque $\frac{64R^3}{9P^2}$ R ejuſdem diſtantia a b G.

106. At, quantum ad rectam C F, vel planum huic inſiſtens; æquipollet, ut magnitudine, ſic & momento, Semicylindro ejuſdem baſis, & altitudinis dimidiæ. Adeoque momentum habet $\frac{1}{4}R^3P$, & $\frac{8R^2}{3P}$ diſtantiam centri gravitatis a CF: Nempe dummodo intelligatur Semicirculo C b F recte inſiſtere.

Quæ autem de *Cycloide* primariâ oſtenſa ſunt, eadem omnia aliis *Cycloidum* generibus, ſive protractis ſive abbreviatis facile applicantur. Id ſiquidem ſolum intereſt, ut pro Zz rectis ubiq; ſubſtituantur aliæ quæ ſint ad has in eadem ratione qua Baſis *Cycloidis* ad Peripheriam Circuli generantis.

Pars



Pars Secunda.



☞ 1. AD centrum gravitatis curvæ ſemicycloidis A C fig. 1. hoc eſt A C fig. 8. inveniendum, aſſumo tanquam a D. Wren* demonſtratum, tum curvam C A duplam eſſe rectæ C F, tum ubique C Z curvam rectæ C z duplam eſſe. Adeoque poſita recta C z = *a*, erit correſpondens curva C Z = 2 *a*. Et propterea, ſumptis chordis circuli C z arithmetice proportionalibus, erunt item correſpondentes curvæ C Z arithmetice proportionales; & curva C A in punctis Z in æquales partes diviſa.

Centrum curvæ C A. Fig. 1. 8.

* *Vide ad calcem hujus*

2. Harum vero partium æqualium (quas ſupponamus numero infinitas, & totidem Z punctis deſignatas) diſtantia ab A F rectâ, eſt ubique F Y $= \frac{D^2 - a^2}{D}$. Nam, propter ſimilia triangula, ut F C $= D$, ad F z $= \sqrt{:D^2 - a^2}:$ ſic eadem F z $= \sqrt{:D^2 - a^2}:$ ad F Y, quæ igitur eſt $\frac{D^2 - a^2}{D}$. (Exponendo nempe quantitatem *a* ſucceſſive per 1 2, 3, &c. quarum maxima ſit *D*.)

3. Si igitur curvæ C A fig. 8. æqualis extendatur recta C A fig. 9. quæ intelligatur ſimiliter diviſa in punctis Z: atque à punctis Z erigi intelligantur Z X rectæ, reſpectivis diſtantiis F Y æquales; perque omnia puncta X duci curvam A X F: Exhibebunt tum ſingulæ rectæ Z X fig. 9. (reſpectivis Z X fig. 8. æquales) ſingularum Z partium æqualium, in curva C A fig. 8. momenta reſpectu A F rectæ; tum omnes omnium. Adeoque omnium Z partium æqualium, hoc eſt totius curvæ C A fig. 8. momentum in ſuo ſitu, reſpectu A F rectæ, eſt ad momentum æqualis lineæ in diſtantia F C maxima ſuſpenſæ, (hoc eſt, ad momentum maximum toties ſumptum,) ut trilineum A F C fig. 9. ad ſibi circumſcriptum parallelogrammum: Hoc eſt, ut ſemiparabola (quod mox oſtendetur ☞ 6.) ad circumſcriptum parallelogrammum; ſive ut 2 ad 3. Et conſequenter, centrum gravitatis curvæ C A fig. 8. diſtabit ab A F recta, duabus tertiis rectæ C F, ſive $\frac{2}{3}$ *D*.

Centri diſtantia ab A F.

Fig. 9.

NB. In citationibus ☞ notat paragraphos hujus partis, & § paragraphos partis præcedentis.

4. Et

Centrum segmentorum curvæ C A.

4. Et similiter de segmenti cujusvis tum momento, tum centro gravitatis judicandum erit: Habent utique momenta partium curvæ C A fig. 8. respectu A F rectæ, eam inter se rationem, quam respectivæ partes semiparabolæ A F C fig. 9. rectis diametro parallelis abscissæ: quamque habent hæ parabolæ partes ad respectivas partes parallelogrammi circumscripti, eam habent distantiæ centrorum gravitatis earundem partium (ab A F recta) ad totam F C.

Superficies circa A F descripta.

5. Si vero pro singulis rectis Z X fig. 9. hoc est radiis circulorum punctis Z fig. 8. circa A F rectam conversis descriptorum, substituantur ubique rectæ quæ sint ad has ut circuli peripheria ad ejusdem radium: Hoc est, si semiparabola quæ basin jam habet $AC = 2\mathcal{D}$ & altitudinem $CF = \mathcal{D}$, intelligatur, super eadem base constituta, altitudinem habere $4\,AF = 2P$; esset ea semiparabola æqualis superficiei conversione curvæ C A fig. 8 circa A F rectam descriptæ; (nempe $\frac{8}{3}\mathcal{D}P$, sive $\frac{32}{3}$ circuli genitoris:) ejusque partes respectivæ respectivis partibus hujus æquales.

6. Quod autem FXA fig, 9. sit parabola, sic ostenditur. Rectæ Z X sunt ubique ut $\frac{\mathcal{D}^2 - a^2}{\mathcal{D}}$ per ∽ 2. Hoc est, ut $\mathcal{D}^2 - a^2$; adeoque residuæ Xζ, hoc est ξ F diametri, ubique ut a^2; hoc est in duplicata ratione Z C, hoc est X ξ ordinatim applicatarum. Quod Parabolæ proprium est.

Centri curvæ distantia a C F.

7. Porro, ejusdem curvæ C A fig. 8. divisæ ut prius in punctis Z, omnium punctorum Z (seu partium æqualium his punctis designatarum) distantiæ à C F, sunt Z Y, hoc est Z z + z Y.

Fig. 10. 8. Adeoque si curvæ CA fig. 8. æqualis extendatur recta C A fig. 10. similiter divisa; atque per divisionum puncta Z ducantur rectæ V Z v, ita quidem ut Z V fig. 10. sint respectivis z Z fig. 8. æquales, & Z v respectivis z Y: exhibebunt hæ rectæ V Z v singulæ singulorum curvæ punctorum Z momenta respectu rectæ C F fig. 8. adeoque omnes omnium. Hoc est, figura F V C v A momentum totius A C curvæ (respectu rectæ C F,) & illius partes, partes respectivas hujus.

9. Cum vero rectæ C Z fig. 10. hoc est C Z curvæ fig. 8. sint ut C z chordæ in semicirculo æqualiter crescentes, hoc est, ut sinus recti in quadrante crescentes æqualiter, puta ut B V in trilineo B C c fig. 7.
Fig. 7. (si nempe intelligatur c B in punctis V æqualiter

liter divisa:) ipsæque rectæ Z V fig. 10. hoc est z Z fig. 8. sive arcus z C, hoc est arcus chordarum in semicirculo (vel sinuum in quadrante) arithmetice proportionalium, ut rectæ V Z trilinei B C c fig. 7. (Nam sicut recta Z z fig. 7. hoc est recta Z z fig. 8. æquatur arcui Z C, sic recta Z V fig. 7. quæ una cum Z z complet totam V z = B b, hoc est b C arcum quadrantalem, æquatur arcui ad quadrantem residuo Z b, cujus sinus rectus est Y b = B V fig. 7. adeoque omnes V Z trilineum B C c fig. 7. complentes, æqualibus distantiis sumptæ, sunt ut arcus sinuum arithmetice proportionalium in quadrante, sive chordarum æqualiter crescentium in semicirculo; hoc est, ut Z z fig. 8. correspondentes punctis Z æqualibus intervallis in curva C A sumptis:) Erunt omnes V Z trilinei C Z A F fig. 10. ad F A toties positam, hoc est trilineum illud ad circumscriptum parallelogrammum; ut trilineum B C c fig. 7, ad parallelogrammum circumscriptum sibi. (Et illius partes partibus hujus respective sumptis proportionales.)

10. Trilineì autem B C *c* fig. 7. (aut etiam partis hujus cujuslibet) mensura, habetur ex calculo § 23. Est enim B b $= \frac{1}{4} P$, & b C $= R$; ergo parallelogrammum B b C c $= \frac{1}{4} R P$: trilineum autem B C b $= R^2$ (ut § 76 dictum est,) ergo trilineum reliquum B C c $= \frac{1}{4} RP - R^2 = \frac{1}{8} \mathcal{D}\mathcal{P} - \frac{1}{4}\mathcal{D}^2$; (Hoc est $\frac{1}{4}$ A F $- \frac{1}{4}$ C F in C F.) Unde & trilinei C F A mensura colligitur; quippe ipsius octupla, (propter A F $= \frac{1}{2} P$, & A C $= 2 D = 4 R$, adeoque parallelogrammum F C $= 2 R$P,) nempe $2 R P - 8 R^2$ vel $\mathcal{D}\mathcal{P} - 2\mathcal{D}^2$. (Et partium similiter mensura, mutatis mutandis, eodem modo colligitur.) Momentum itaque curvæ C Z A fig. 8. respectu rectæ C F, quantum ad distantias Z z, esset ad ejusdem curvæ momentum in distantia F A suspensæ; ut C Z A F fig. 10. ad circumscriptum parallelogrammum; hoc est, ut $\mathcal{D}\mathcal{P} - 2\mathcal{D}^2$ ad $\mathcal{D} P$, sive ut $\mathcal{P} - 2\mathcal{D}$ ad P; hoc est, ut A F $-$ C F ad A F.

11. Tum vero, quantum ad distantias z Y fig. 8. (quæ simul cum Z z complent integras Z Y,) hoc est, Z *v* (bilinei A C *v*) fig. 10. Cum rectæ C Z fig. 10. hoc est curvæ C Z fig. 8. sint ut chordæ C z $= a$: erunt respectivæ z Y: ($=$ Z *v* fig. 10.) $= \frac{a\sqrt{:D^2 - a^2:}}{D}$ Nam (propter similia triangula) ut CF $=$ D, Fig. 10.

 ad

ad C z $= a$, sic z F $= \sqrt{: D^2 - a^2:}$ ad z Y $= \frac{a \sqrt{: D^2 - a^2:}}{D}$

Qui itaque est character rectarum Z v bilinei A C v fig. 10. positâ rectâ C z (fig. 8.) $= a$. adeoque curvâ C Z fig. 8. hoc est, rectâ C Z fig. 10. $= 2a$.

Fig. 11. 12. Hujus autem Bilinei, hoc est omnium simul Z v, mensura sic colligitur. Omnes $\sqrt{: D^2 - a^2:}$ sunt ut ordinatim applicatæ in Circuli vel Ellipseos quadrante. Adeoque si radio $D =$ C F describatur circuli quadrans C F $\varkappa$ fig. 11. ipsius omnes rectæ Z S, radio C $\varkappa$ parallelæ, sunt $\sqrt{: D^2 - a^2:}$ (ponendo C z $= a$.) Deinde, si super hoc circuli quadrante erigatur quadrans Cylindri recti, altitudinem habens F $\varphi =$ C F $= D$, qui oblique secetur plano φ C $\varkappa$; & abscissa portio secetur plano super Z S rectâ erecto: sectio Z σ erit parallelogrammum, cujus basis Z S $= \sqrt{: D^2 - a^2:}$ altitudo Z$\zeta =$ C z $= a$; adeoque ipsum parallelogrammum Z $\sigma = a \sqrt{: D^2 - a^2}$. Cumque hæc omnia parallelogramma numero infinita, portionem Cylindri complentia, sint respectivis rectis Z v fig. 10. proportionalia (ut quæ ad eandem $D =$ C F applicata, dant ipsas Z $v = \frac{a \sqrt{: D^2 - a^2.}}{D}$) Si fiat ubique ut CF fig. 11. ad Cz $=$ zζ, sic zS ad zY; erunt omnes rectæ z Y fig. 11. æquales respectivis rectis Z v fig. 10. Neque aliter differt Bilineum ACv fig. 10. à Bilineo F C Y fig. 11. quam quod (propter rectam AC duplam rectæ FC) alterũ sit alterius duplum. (Et partes illius respectivarum partium hujus duplæ.) Est autem C Y F curva, curvæ hujusmodi



(in se, post decussationem in itinere, recurrentis) Pars quarta.

13. Sed & pari ratione Bilinei F C Y fig. 11. segmenta C z Y, sunt Cylindricæ portionis segmentis C z σ proportionalia. Totumque Bilineum F C Y, ad quadratum rectæ C F, eam habet rationem quam exposita portio Cylindrica ad ejusdem rectæ C F cubum. Adeoque ut 1 ad 3. Sunt enim omnia triangula Σ S σ (triangulo C F φ parallela & similia) portionem Cylindri complentia, ad totidem triangulo C F φ æqualia, ut omnia quadrata Σ S, ad omnia quadrata C F cubum rectæ C F complentia; nempe ut omnia $D^2 - a^2$ ad totidem D^2, hoc est ut $1 - \frac{1}{3}$ ad 1, sive ut 2 ad 3. (Vel, quod eodem residet, ut omnes circuli

circuli radiorum Σ S ad totidem circulos radii C F; hoc eſt, ut hemiſphærium ad circumſcriptum Cylindrum; hoc eſt, ut 2 ad 3, ut prius:) Adeoque omnia triangula Σ S σ (quadratorum dimidia) portionem complentia, hoc eſt ipſa portio cylindrica, ad eundem rectæ C F cubum, ut 1 ad 3. Et conſequenter, Bilineum F C Y fig. 11. ad eundem C F quadratum, ut 1 ad 3: Et Bilineum A C υ fig. 10. (prioris duplum) ad idem quadratum, ut 2 ad 3. Hoc eſt, $\frac{2}{3} D^2$, ſive $\frac{8}{3} R^2$.

14. Et ſimile de partibus fiet judicium. Cum enim triangula Σ S σ fig. 11. ſint ad invicem ut circuli in hemiſphærio; erit portionis ſegmentum ΣSσκ, ad totam portionem, ut reſpectivum hemiſphærii ſegmentum plano abſciſſum, ad totum hemiſphærium; adeoque magnitudinis notæ: Cui portionis ſegmento ΣSσκ, ſi addatur priſma Σ S σ ζ zC, habetur ſegmentum κSσζzC; adeoque & ipſius ratio ad D^3 cubum diametri circuli genitoris: hoc eſt, ratio ſegmenti C z Y, tum ad totum bilineum F C Y, tum ad quadratum rectæ C F. (Bilinei autem iſtius F C Y, latitudo maxima, ſive maxima altitudo ratione baſis F C, eſt $R = \frac{1}{2}$ C F, quæ quidem illic contingit, ubi ſumitur $Cz = CF\sqrt{\frac{1}{2}} = D\sqrt{\frac{1}{2}}$; hoc eſt, ubi C z ad C F eſt, ut ſinus rectus graduum 45, ad Radium: quod tamen ad præſens negotium cognitu non videtur neceſſarium.) Poteſt autem idem etiam ſic colligi. Cum z σ parallelogramma, ſint ubique rectarum z S momentis, reſpectu rectæ C κ, proportionalia, (ut patet;) Erunt κ S σ ζ z C ſegmenta, tunc inter ſe, tum ad totam κφFC portionem, ut momenta planorum κSzC reſpectu rectæ κC, tum inter ſe, tum ad momentum κ F C quadrantis reſpectu ejuſdem κ C, (quam § 67 & ſeqq. exhibendam docuimus;) eadem igitur & ratio planorum C Y z Et quidem, cum omnium rectarum z S, illa maximum, reſpectu C κ rectæ, ſortiatur momentum quæ grad. 45 ſubtendit; ea ſimiliter quæ huic correſpondet erit omnium z Y maxima, adeoque bilinei C F Y verticem deſignabit.

15. Cum igitur habeamus (fig. 10.) tum Trilineum C Z A F $= 2RP - 8R^2$ per ∾ 9; tum Bilineum C A υ $= \frac{8}{3} R^2$, per ∾ 13: Eorum aggregatum $2RP - \frac{16}{3} R^2$, æquatur facto ex omnibus particulis curvæ C A fig. 8. in ſuas reſpective diſtantias Z Y. Fig. 10.

Tota vero curva C A $= 2\,D = 4\,R$, in rectam A F $= \frac{1}{2}\,P$ ducta, est $2\,R\,P$. Momentum igitur curvæ C A fig. 8. in suo situ, ad momentum ejusdem ex puncto A suspensæ (respectu C F rectæ) est ut $2\,R\,P - \frac{16}{3}\,R^2$ ad $2\,R\,P$, vel ut $\frac{1}{2}\,P - \frac{4}{3}\,R$ ad $\frac{1}{2}\,P$; hoc est, ut A F $- \frac{2}{3}$ C F, ad A F. Adeoque centrum gravitatis curvæ C A fig. 8. à recta C F distat, ea parte rectæ F A quæ sit ad totam ut F A $- \frac{2}{3}$ F C ad F A. Hoc est, (ductâ A α rectæ F C parallelâ,) ab A α distat, $\frac{2}{3}$ F C $= \frac{2}{3}\,D$: Tantundem scilicet quantum supra invenimus (§ 3.) ab A F distare. Adeoque sumptis tum A δ, tum A Γ, $= \frac{2}{3}$ C F, ductisque $\delta\,\Delta$, Γ γ, (rectis A F, F C, parallelis,) se decussantibus in D, erit D centrum gravitatis curvæ C A F fig. 8.

Superficies conversione circa C F descripta.

16. Sin porro, pro rectis omnibus Z V & Z v fig. 10. substituantur aliæ quæ ad has sint ut percipheria circuli ad ejusdem radium; adeoque pro $2\,R\,P - \frac{16}{3}\,R^2$ (quæ est magnitudo figuræ ex trilineo & bilineo fig. 10. compositæ,) substituatur $2\,P^2 - \frac{16}{13}\,RP$; habetur superficies quæ ex conversione curvæ C A fig. 8. circa C F describitur. Æquat itaque duo quadrata basis integræ cycloidis (hoc est, peripheriæ circuli genitoris) minus $\frac{32}{3}$ genitoris circuli. Adeoque (cum, per § 5, superficies ejusdem conversione circa A F descripta sit $\frac{32}{3}$ genitoris circuli) superficies duæ ab eadem curva C A fig. 8. descriptæ, (altera circa A F, altera circa C F,) simul sumptæ, æquant præcise duo quadrata basis integræ cycloidis sive peripheriæ genitoris circuli. Puta, si, ut in fig. 12. intra semissem quadrati cujus latus intelligatur $= 2\,P$, describatur semiparabola æque alta, basin habens $2\,D$; dirimetur semi quadratum illud in duas partes, quarum altera uni, altera reliquæ, superficierum illarum curvarum æquatur. Sin converti intelligatur, illic tota A C D, semicycloidis A C dupla; hic vero ejusdem item dupla, nempe AC infra basin continuata donec productæ C F occurrat; pro semiparabola & semiquadrato, integra prodibunt parabola & quadratum.

Fig. 12.

17. Completo autem parallelogrammo F α fig. 8. Quæ C A curvâ, circa A α conversâ, describitur superficies, est æqualis ei quæ ab eadem circa A F conversâ describitur; (propter A δ = A Γ:) Quæ autem ab eadem circa C α conversa describitur, est dimidia illius quæ describitur conversione circa A F; (propter D Γ duplam rectæ D γ.) Et universaliter superficies quæ à curva

C A

C A circa quamvis rectam (quæ ipsam non secet) conversa describitur, eam rationem habet ad harum quamlibet, vel quamvis aliam sic descriptam, quam inter se habent distantiæ puncti D ab illis rectis. Et quidem (nam & hoc adjungere non erit forsan incommodum) si circa rectam quæ ipsam secet convertatur eadem C A curva; *Differentia* superficierum, quam ea pars curvæ quæ ex uno rectæ secantis latere sita est describit, & quam (vel quas, si binis punctis secet,) describit illius curvæ residuum ex altero secantis latere positum, eam habet rationem ad superficiem circa superius memoratarum rectarum quamvis descriptam, (puta quæ circa A F,) quam habet distantia istius rectæ ad distantiam hujus à centro gravitatis D. Quodque de superficiebus totâ curvâ descriptis dictum est, superficiebus ipsius parte quavis descriptis similiter accommodabitur, invento prius (per jam tradita) istius partis centro gravitatis.

18. Absoluto jam opere de gravitatis centro, tum curvæ semicycloidis C A fig. 8. tum partium ejus, inquirendo; deque superficiebus istius conversione, tum circa A F, tum circa B F, descriptis: De superficierum harum centris gravitatis inquirendum. Incipiemus autem ab ea superficie quæ conversione circa rectam A F describitur. Peripherias autem hanc complentes, adeoque & semiperipherias complentes illius semissem, à singulis curvæ punctis descriptas, proportionales esse diximus (∾ 3.) semiparatabolæ rectis Z X fig. 9. diametro parallelis. Earundem autem semipheriarum Momenta respectu rectæ A F, cum ex ratione tum magnitudinum tum distantiarum centrorum gravitatis dependeant, suntque hæ ipsæ centrorum distantiæ ab A F recta ipsarum peripheriarum radiis, adeoque & magnitudinibus, proportionales; erunt ea momenta in radiorum ratione duplicata; hoc est, in duplicata ratione rectarum Z X fig. 9. semiparabolæ diametro parallelarum; hoc est, in ratione circulorum radiis illis descriptorum. Adeoque ea omnia momenta, ad totidem maximo æqualia; hoc est, momentum superficiei quæ hac curvæ C A conversione describitur, in suo situ, ad momentum superficiei Cylindricæ ex æqualis rectæ in distantia F C conversione, est ut solidum ex conversione semiparabolæ circa basin suam, ad cylindrum ex conversione circumscripti parallelogrammi circa eandem basin, descriptum; Hoc est, ut 8 ad 15 (per prop. 119. Arithm. Infin.)

Superficiei, semiconversione circa A F facta, centrum quantum ab A F distat. Fig. 9.

Infin.) ſuperficierum autem magnitudo ad magnitudinem eſt ut 2 ad 3 (per ∽ 3.) Ergo, propter $\frac{2}{3}$) $\frac{8}{15}$ ($\frac{4}{5}$, centrorum gravitatis diſtantia ad diſtantiam ut 4 ad 5. Diſtantia igitur centri gravitatis, dempta curvatura ſemicirculari, eſſet $\frac{4}{5}$ F C, $=$ $\frac{4}{5}$ *D*. Sed, propter illam curvaturam, ſumendum adhuc, ut ſemiperipheria ad diametrum, ſive ut $\frac{1}{2}$ *P* ad *D*, ſic $\frac{4}{5}$ *D* ad quartam, $\frac{8\,D^2}{5\,P}$, quæ itaque eſt diſtantia centri gravitatis ſuperficiei ex ſemi converſione curvæ C A circa A F, ab A F; nempe ea pars rectæ F C

Fig. 8. fig. 8. quæ eſt ad totam, ut 8 F C ad 10 F A. (Et quidem ſimili proceſſu facile eſſet idem indicare in aliis integræ converſionis datis partibus; puta non modo in ſemi converſione, ſive $\frac{1}{2}$ converſionis integræ, ſed etiam in $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, *&c.* vel $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, *&c.* integræ converſionis: Nempe ſumpta rectæ $\frac{4}{5}$FC ea parte quæ ſit ad ipſam $\frac{4}{5}$ F C, ut chorda ad arcum converſionis.)

Quantum diſtat a CF. 19. Ut autem ejuſdem centri diſtantia à recta F C (fig. 8.) habeatur; componendæ ſunt rationes rectarum Z X fig. 9. atque V *v* fig. 10. (quarum quidem illæ notant diſtantias punctorum Z fig. 8. à recta F A, hæ vero eorundem ab F C diſtantias.)

Fig. 9. 10. Hoc eſt, propter V *v* $=$ Z V + Z *v*, componendæ ſunt rationes illæ Z X, tum cum Z V, tum etiam cum Z *v*; quæque emergunt binæ rationes compoſitæ, ſunt conjungendæ; earumque aggregata, ſunt rationes momentorum peripheriarum, vel ſemiperipheriarum, punctis Z fig. 8. circa F A deſcriptarum, reſpectu rectæ F C.

20. Rationes autem rectarum Z X, hoc eſt $\frac{D^2 - a^2}{D}$, cum rationibus Z *v*, hoc eſt $\frac{a\sqrt{:D^2 - a^2:}}{D}$ compoſitæ, ſunt ut $\frac{a\,D^2 - a^3}{D^2}$ $\times \sqrt{:D^2 - a^2:}$ (nempe, ut rectangula ex ductu rectæ Z X fig. 9. in Z *v* fig. 10.) Quæ omnia ad D^2 toties ſumptum, hoc eſt (propter AC $=$ 2*D*) ad 2D³: ſunt ut 1 ad 5; (quod ſeorſum probabitur ∽ 52 & ſeqq.) Adeoque ſolidum ex Bilineo AC*v* fig. 10. in altitudines reſpectivas Z X fig. 9. eſt $\frac{2}{5}$ D^3.

21. Rationes vero rectarum; Z X fig. 9. cum rationibus Z V fig. 10. compoſitæ; ſunt rationes rectangulorum rectis *Z* V Z X contentorum; hoc eſt rectarum Z V in $\frac{D^2 - a^2}{D}$ reſpective

ductarum

ductarum; sive in $D - \frac{a^2}{D}$.

22. Omnes autem Z V in D; hoc est, trilineum C Z A F in D; hoc est (per ∽ 10) $DP - 2D^2$ in D; est, $D^2P - 2D^3$. Unde si auferamus omnes Z V in $\frac{a^2}{D}$, hoc est $\frac{1}{3} D^2P - \frac{4}{9}D^3$ (ut deinceps ostendetur ∽ 25 & seqq.) manebit $\frac{2}{3} D^2P - \frac{14}{9}D^3$ quod itaque est solidum ex Trilineo C Z A F fig. 10. in altitudines respectivas Z X fig. 9. ducto.

23. Huic igitur solido, si addatur solidum ex Bilineo C A v in easdem respectivas altitudines ducto, nempe $\frac{2}{5}$ D³ (per ∽ 20;) aggregatum $\frac{2}{3}D^2P - \frac{14}{9}D^3 + \frac{2}{5}D^3 = \frac{2}{3}D^2P - \frac{52}{45}D^3$, est solidum ex Trilineo C v A F fig. 10. in altitudines Z X fig. 9. respective ducto; sive ex omnibus V v fig. 10. in respectivas Z X fig. 9. sive ex omnibus Z Y in Z X fig. 8. respective.

24. Quam autem rationem habet hoc solidum (ex omnibus Z X fig. 9. in V v fig. 10. respective,) ad solidum ex semiparabola F A C (hoc est, omnibus, Z X) fig. 9 in A F fig. 8. ubique ducta, hoc est, ad $\frac{2}{3}$ D² P: (nam propter A C $= 2D$, & C F $= D$, adeoque rectangulum A C F $= 2D^2$, erit ea semiparabola $\frac{4}{3}D^2$, quippe $\frac{2}{3}$ rectanguli; quæ semiparabola, ducta in F A $= \frac{1}{2}P$, dat $\frac{2}{3}D^2P$ magnitudinem solidi, sive prismatis parabolici:) Eam habet momentum superficiei, in suo situ, quæ fit ea semiconversione curvæ C Z A fig. 8. circa A F, respectu rectæ C F, (hoc est, factum ea semiperipheriis, ipsis Z X proportionalibus, in distantias V v, hoc est Z Y, respective,) ad momentum ejusdem superficiei ex puncto A suspensæ, (hoc est, ad factum ex iisdem semiperipheriis in distantiam A F ubique.) Et consequenter, eadem est ratio distantiæ centri gravitatis ejusdem superficiei à recta F C, ad distantiam F A. Nempe ut $P - \frac{26}{15}D$ ad P. Fig. 10.

25. Quod autem omnes Z V in $\frac{a^2}{D}$, sit $\frac{1}{3}D^2P - \frac{4}{9}D^3$, sic pedetentim ostendetur. Omnes Z V fig. 10. in $4a^2$, hoc est (propter C A $= 2D$) in respectiva quadrata distantiarum C Z; ad easdem omnes in quadratum C A; sunt ut momentum (respectu rectæ c C) portionis prismatis in suo situ, oblique plano secti, super trilineo C Z A F erectæ, altitudinem habentis in puncto C nullam, at super A F recta æqualem rectæ C A; ad momen-

momentum (respecta ejusdem c C) integri prismatis super eadem base, altitudinem habentis rectæ A C æqualem, ex puncto A suspensi. (Omnes enim Z V ductæ tum in C Z $= 2a$ propter distantiam, tum iterum in eandem C Z $= 2a$ propter altitudinem distantiæ æqualem, tantundem est atque in $4a^2$: & similiter, eædem omnes ductæ tum in altitudinem maximam, tum iterum in maximam distantiam, tantundem est atque in quadratum
Fig. 7. A C ductæ.) Hoc est, (propter binarum figurarum parallelas rectas proportionales,) ut momentum ejusmodi portionis prismatis super trilineo B c C fig. 7. in suo situ, ad momentum similis prismatis integri ex puncto C suspensi, respectu rectæ B b. Quam rationem sic investigamus:

26. Distantia Centri gravitatis Triliniti B b C fig. 7. & consequenter trilinei B c C, à recta B b, sic colligitur. Quadrantis G b C fig. 1. vel 8. centrum gravitatis à recta G b distat $\frac{2D^2}{3P}$, (quantum scilicet à centro circuli distat centrum gravitatis semicirculi;) à recta igitur A F distat, $\frac{2D^2}{3P} + \frac{1}{2}D$; quæ distantia in ejusdem quadrantis magnitudinem $\frac{1}{16}DP$ ducta, dat $\frac{1}{24}D^3 + \frac{1}{32}D^2P$, momentum quadrantis G b C respectu rectæ A F; cui si addatur momentum trianguli G b F, (factum ubique ex magnitudine in distantiam centri gravitatis) $\frac{1}{24}D^3 = \frac{1}{2}R^2 \times \frac{2}{3}R$; habetur $\frac{1}{12}D^3 + \frac{1}{32}D^2P$ momentum sectoris F b C respectu A F rectæ.

27. Est autem momentum quadrilinei B β F C fig. 1. ad momentum dicti sectoris F b C (respectu ejusdem A F rectæ) ut 5 ad 2 (per § 26;) Adeoque momentum quinquilinei B β F b C fig. 1. hoc est quadrilinei B β F C fig. 7. ad idem sectoris momentum, ut 3 ad 2; adeoque $\frac{1}{8}D^3 + \frac{3}{64}D^2P$.

28. Unde si auferatur momentum parallelogrammi B F; nempe $\frac{1}{8}DP \times \frac{1}{4}D = \frac{1}{32}D^2P$, manebit $\frac{1}{8}D^3 + \frac{1}{64}D^2P$ momentum trilinei B b C (fig. 1. vel 7.) respectu rectę A F.

29. Hoc autem momentum, per trilinei hujus magnitudinem $R^2 = \frac{1}{4}D^2$ divisum, dat $\frac{1}{2}D + \frac{1}{16}P$ distantiam centri gravitatis dicti trilinei B b C ab A F recta; Adeoque $\frac{1}{16}P$ ejusdem distantiam a Bb: Et consequenter $\frac{1}{4}D^2 \times \frac{1}{16}P = \frac{1}{64}D^2P$ momentum dicti trilinei B b C respectu rectæ B b.

30.

30. Quod quidem momentum $\frac{1}{64}D^2P$, si ex Parallelogrammi B C momento $\frac{1}{8}DP \times \frac{1}{4}D = \frac{1}{32}D^2P$ auferatur; manebit $\frac{1}{64}D^2P$ momentum trilinei B c C respectu ejusdem B b. (Idem utique atque momentum trilinei B b C respectu ejusdem B b.)

31. Quod denique trilinei B c C momentum, per ejusdem magnitudinem $\frac{1}{8}DP - \frac{1}{4}D^2$ divisum, dat $\frac{DP}{8P - 16D}$ distantiam centri gravitatis dicti B c C trilinei à recta B b. Quæ itaque est ea pars rectæ b C $= \frac{1}{2}D$, quæ est ad totam $\frac{1}{2}D$, ut $2P$ ad $8P - 16D$, sive $\frac{1}{2}P$ ad $2P - 4D$; hoc est, ut A F ad 4 A F $-$ 4 F C. Quod § 26 proposuimus inquirendum.

32. Habita vero distantiâ centri gravitatis trilinei B c C à B b; adeoque portionis altitudine super idem gravitatis centrum, (quippe distantiæ quæ isti æqualis est, propter altitudinē maximā æqualem maximæ distantiæ, adeoque & reliquas reliquis, utpote proportionales;) nempe $\frac{DP}{8P - 16D}$: Si hæc altitudo in basis magnitudinem $\frac{1}{8}DP - \frac{1}{4}D^2$ ducatur; habetur $\frac{1}{64}D^2P$ dictæ portionis prismatis (trilineo B c C insistentis) magnitudo: (æqualis quidem momento supra invento.)

33. Ejusdem vero portionis prismatis (trilineo B c C insistentis) Momentum, his passibus investigamus. Si super semicirculum F b C fig. 1. erigatur semicylindri portio, qualis F c C Y z fig. 5. altitudinem habens in F nullam, in C vero C c $=$ C F: Fig. 5.
Semicirculus basis est $\frac{1}{8}DP$; hic in altitudinem super centro gravitatis plani, hoc est in $\frac{1}{2}D$, ductus, dat $\frac{1}{16}D^2P$ magnitudinem expositæ portionis Semicylindri.

34. Hujus vero portionis Semicylindri, centrum gravitatis distat à plano in F tangente, rectâ F g $= \frac{5}{8}$ D (ut supra § 57;) quæ distantia in magnitudinem $\frac{1}{16}D^2P$ ducta, dat $\frac{5}{128}D^3P$ momentum expositæ portionis Semicylindri respectu tangentis in F, hoc est F A fig. 1.

35. Ex hac vero Semicylindri portione, auferamus primò eam istius partem quæ quadranti F Y z fig. 5. insistit, (hoc est, quadranti F G b fig. 1. vel 7.) cujus magnitudinem primò, deinde momentum, sic investigamus.

36. Quadrantis F Y z fig. 5. centrum gravitatis, à recta Y z,
 distat

distat $\frac{2D^2}{3P}$; adeoque ab F A distabit $\frac{1}{2}D - \frac{2D^2}{3P}$; quæ distantia (cum sit altitudini super idem gravitatis centrum æqualis) ducta in basis magnitudinem $\frac{1}{16}DP$, dat portionis huic quadranti insistentis magnitudinem, $\frac{1}{32}D^2P - \frac{1}{24}D^3$, vel $\frac{3P - 4D}{96} \times D^2$.

37. Si autem intelligatur hæc portio (quadranti F Y z fig. 5 insistens) plano Y z ζ v abscindi, & sic super reliquam partem replicari, ut cum ea compleat Cylindrum quadrantalem: Facta hæc replicatione, tanto ultra Y constituetur istius replicatæ partis centrum gravitatis, quanto prius citrà constitutum erat: ut patet.

38. Momentum verò hujus Cylindri quadrantalis, sic habetur; Centrum gravitatis quadrantis Y z C fig. 5. distat ab A F, $\frac{2D^2}{3P} + \frac{1}{2}D$, (quod modo ostensum est ∽ 26;) quæ itaque est distantia centri gravitatis quadrantalis Cylindri (super Y z C constituti) a plano φ F A: Quæ quidem distantia in quadrantalis cylindri magnitudinem $\frac{1}{16}D^2P$ ducta, dat $\frac{1}{24}D^4 + \frac{1}{32}D^3P$ ejusdem momentum respectu rectæ F A.

39. Hinc vero si auferamus momentum portionis ante replicationem factam, $\frac{1}{128}D^3P$ (ut supra ∽ 34.) manebit $\frac{1}{24}D^4 - \frac{1}{128}D^3P$, sive $\frac{16D - 3P}{384}D^3$, augmentum momenti ob promotum gravitatis centrum partis replicatæ. Quod quidē momenti augmentum, per $\frac{3P - 4D}{96}D^2$ replicatæ partis magnitudinē, divisum, dat $\frac{16D - 3P}{12P - 16D}D$, mensuram promotionis centri gravitatis: Cujus itaque semissis $\frac{16D - 3P}{24P - 32D}D$ est centri gravitatis partis replicatæ distantia à medio: Quæ quidem si ex $\frac{1}{2}D$ auferatur, quod restat $\frac{15P - 32D}{24P - 32D}D$ vel $\frac{15P - 32D}{3P - 4D} \times \frac{1}{8}$, est ejusdem centri distantia à plano φ F A. Atque hæc demum

mum diſtantia, in $\frac{3P - 4D}{96}D^2$ magnitudinem ducta, dat $\frac{15P - 32D}{768}D^3$, ſive $\frac{5}{256}D^3P - \frac{1}{24}D^4$, expoſitæ portionis quadranti F Y z inſiſtentis momentum, reſpectu rectæ F A. Quod § 35 proponitur inquirendum.

40. Hoc igitur momentum, ex $\frac{5}{128}D^3P$ momento totius portionis ſemicylindri, ablatum, relinquit $\frac{5}{256}D^3P + \frac{1}{24}D^4$, portionis reſiduæ z Y v c C, quadranti z Y C inſiſtentis, momentum.

41. Deinde, poſt hoc ablatum, reſtituendum eſt quantum triangulo quadranti F Y z inſcripto (hoc eſt, triangulo F G b fig. 1.) inſiſtit: Nempe Pyramis, baſin habens Y v ζ z $= \frac{1}{4}D^2$, altitudinem F Y $= \frac{1}{2}D$, quæ in baſim ducta dat $\frac{1}{8}D^3$, cujus triens $\frac{1}{24}D^3$ eſt pyramidis magnitudo; atque hæc in $\frac{3}{8}D$, diſtantiam ſui centri gravitatis à plano φ F A, ducta, dat $\frac{1}{64}D^4$ pyramidis momentum reſpectu F A rectæ: Quod quidem momentum, momento reliquæ partis $\frac{5}{256}D^3P + \frac{1}{24}D^4$ additum, dat $\frac{5}{256}D^3P + \frac{11}{192}D^4$ momentum iſtius omnis quod ſectori F b C fig. 1. inſiſtit, reſpectu rectæ A F.

42. Cognito autem momento Portionis ſic ſecti priſmatis Sectori C F b inſiſtentis; cognoſcitur etiam momentum portionis priſmatis Quadrilineo C F β B fig. 1. inſiſtentis, eodem plano ſecti, (reſpectu ejuſdem A F rectæ:) Eſt utique ad illud, ut 7 ad 3 (per § 45:) Adeoque illius quod Quinquilineo CbFβD fig. 1. hoc eſt Quadrilineo C F β B fig. 7. (utpote quod ad idem momentum eſt 4 ad 3;) nempe $\frac{5}{192}D^3P + \frac{11}{144}D^4$.

43. Unde ſi auferatur momentum iſtius quod Parallelogrammo F B fig. 7. inſiſtit, (hoc eſt, priſmatis baſem habentis triangularem, ſemiſſem utique quadrati F b, adeoque $\frac{1}{8}D^2$, altitudinem vero B b $= \frac{1}{4}P$, cujus itaque magnitudo eſt $\frac{1}{32}D^2P$, quæ in $\frac{2}{3}$ F b $= \frac{1}{3}D$ diſtantiam centri gravitatis à plano rectæ F A inſiſtente ducta, dat $\frac{1}{96}D^3P$ priſmatis momentum reſpectu F A rectæ;) manebit $\frac{1}{64}D^3P + \frac{11}{144}D^4$ momentum iſtius omnis quod trilineo C B b inſiſtit, reſpectu rectæ A F.

44. Quod autem Trilineo huic jam inſiſtit, (altitudinem jam nactum in puncto b æqualem ipſi F b $= \frac{1}{2}D$, & deinceps continue creſcentem,) conſtat ex priſmate ſuper illa baſe, altitudinis

$\frac{1}{2}D$, & æqualis insuper prismatis portione oblique secti. (Eodem plane modo quo super YzC quadrante fig. 5. insistit tum zYυκC Cylindrus quadrantalis, tum ejusmodi Cylindri Portio obliquæ secti ζυcκ.)

45. Hujus vero Prismatis momentum respectu rectæ AF, est $\frac{1}{16}D^4+\frac{1}{128}D^3P$. (Momentum enim trilinei BbC repertum est ∽ 28 esse $\frac{1}{8}D^3+\frac{1}{64}D^2P$, quod in Prismatis altitudinem $\frac{1}{2}D$ ductum, dat momentum prismatis dictum.) Quod quidem ex $\frac{1}{64}D^3P+\frac{11}{144}D^4$ (∽ 43) subductum, relinquit $\frac{1}{128}D^3P+\frac{1}{72}D^4$ momentum portionis prismatis oblique secti trilineo BbC insistentis, respectu AF rectæ. (Adeoque centri gravitatis ab AF distantia est $\frac{1}{2}D+\frac{8D^2}{31}$; & momentum respectu Bb, $\frac{1}{72}D^4$.)

46. At vero integri parallelepipedi æque alti parallelogrammo BC fig. 7. insistentis, eodem plano secti, portio, nempe $\frac{1}{32}D^2P$, in sui centri gravitatis à plano rectæ FA insistente distantiam, nempe Fb + $\frac{2}{3}$ bC $=\frac{1}{2}D+\frac{1}{3}D=\frac{5}{6}D$, ducta, dat $\frac{5}{192}D^3P$ momentum istius prismatis, sive portionis parallelepipedi, respectu istius AF. Unde si auferamus $\frac{1}{128}D^3P+\frac{1}{72}D^4$ momentum portionis trilineo BbC insistentis, ∽ præced. inventum restabit $\frac{7}{384}D^3P-\frac{1}{72}D^4$ momentum portionis trilineo BcC insistentis respectu rectæ AF.

47. Quod quidem momentum, per solidi magnitudinem $\frac{1}{64}D^2P$ (∽ 32 inventam) divisum, dat $\frac{7}{6}D-\frac{8D^2}{9P}$ centri gravitatis ab AF distantiam; adeoque $\frac{2}{3}D-\frac{8D^2}{9P}$ ejusdem distantiam a Bb; quæ in magnitudinem $\frac{1}{64}D^2P$ ducta, dat $\frac{1}{96}D^3P-\frac{1}{72}D^4$ expositæ portionis momentum trilineo BcC insistentis, respectu Bb rectæ. (Vel etiam, ex prismatis parallelogrammo BC insistentis momento respectu Bb, nempe $\frac{1}{32}D^2P\times\frac{1}{3}D=\frac{1}{96}D^3P$, subducto $\frac{1}{72}D^4$ momento portionis insistentis trilineo BbC, restat $\frac{1}{96}D^3P-\frac{1}{72}D^4$ momentum portionis BcC trilineo insistentis respectu Bb, ut prius.) Quod ∽ 33 proponitur investigandum.

48. Integri vero Prismatis, eidem B c C trilineo insistentis, ex puncto C suspensi, momentum respectu ejusdem B rectæ, sic habetur. Prismatis hujus basis est ipsum trilineum B c C $= \frac{1}{2}DP - \frac{1}{4}D^2$ (per ∽ 10) quæ in altitudinem $\frac{1}{2}D$ ducta, dat $\frac{1}{16}D^2P - \frac{1}{8}D^3$ prismatis magnitudinem, quæ in distantiam b C $= \frac{1}{2}D$ ducta, dat $\frac{1}{32}D^3P - \frac{1}{16}D^4$ prismatis ex puncto C suspensi momentum respectu rectæ Bb,

49. Ratio igitur momenti Portionis prismatis in suo situ, ad momentum prismatis integri ex puncto C suspensi, respectu ejusdem Bb rectæ, est (per ∽ 47, 48,) ut $\frac{1}{96}D^3P - \frac{1}{72}D^4$ ad $\frac{1}{32}D^3P - \frac{1}{16}D^4$; hoc est, ut $3P - 4D$ ad $9P - 18D$. Quæ ratio ∽ 25 proponitur investiganda.

50. Hanc autem rationem sic inventam, eandem esse atque rationem omnium ZV fig. 10. in $4a^2$ respective ductorum, ad easdem omnes ZV in quadratum rectæ CA; jam supra ostensum est ∽ 25. At omnes Z V, hoc est trilineum C Z A F, hoc est $DP - 2D^2$ (per ∽ 10) in CA$=2D$ ductæ, dant $2D^2P - 4D^3$ prismatis magnitudinem; quæ iterum in $2D$ distantiam ducta, dat $4D^3P - 8D^4$ momentum dicti prismatis integri trilineo C Z A F fig. 10. insistentis, ex puncto A suspensi, respectu rectæ C c.

51. Adeoque (propter rationem $3P - 4D$ ad $9P - 18D$, ∽ 49 inventam) erit $\frac{3P - 4D}{9P - 18D}$ in $4D^3P - 8D^4$, hoc est $\frac{12P - 16D}{9}D^3$, momentum expositæ portionis prismatis trilineo C Z A F insistentis, in suo situ, respectu C c rectæ; hoc est, factũ ex omnibus Z V in $4a^2$ respective: Et consequenter (dividendo per $4D$) erit $\frac{3P - 4D}{9}D^2$, hoc est $\frac{1}{3}D^2P - \frac{4}{9}D^3$, factũ ex eisdem omnibus Z V in $\frac{a^2}{D}$ respective ductis. Quod ∽ 22, 25. suscepimus ostendendum.

52. Quod autem omnes $\frac{aD^2 - a^3}{D^2}\sqrt{:D^2 - a^2}$; sint ad D^3 toties sumptum, ut 1 ad 5, (quod ∽ 20 probandum suscepimus,) sic ostenditur, ex principiis nostræ *Arithmeticæ Infinitorum*. Infinita

finita series Primanorum, sive Arithmetice proportionalium, ut a, (vel eadem series in 1 ducta,) est ad convenientem seriem Æqualium, ut 1 ad 2. Eadem Primanorum series in seriem Residuorum $D^2 - a^2$ (hoc est in seriem Æqualium mulctatam serie secundanorum,) nempe $aD^2 - a^3$, est ad seriem Æqualium, ut $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ ad 1, sive ut 1 ad 4. Eadem series Primanorum in Residuorum Quadrata, hoc est, in $D^4 - 2a^2D^2 + a^4$, nempe $aD^4 - 2a^3D^2 + a^5$, ad seriem Æqualium, est ut $\frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{1}{6}$ ad 1, sive ut 1 ad 6. Eadem primanorum series in Cubos Residuorum, hoc est, in $D^6 - 3a^2D^4 + 3a^4D^2 - a^6$, nempe $aD^6 - 3a^3D^4 + 3a^5D^2 - a^7$, ad seriem Æqualium, est ut $\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{3}{6} - \frac{1}{8}$ ad 1, sive ut 1 ad 8. Et sic deinceps, (ut sigillatim probabitur ex prop. 64. Arithm. Infin.) Nempe series Primanorum, respective ducta in

seriē,	0.	Unit.	Resid.	Qu: Resid.	Cub: Resid.	Biquad. Residuorū,	&c.
dat rationes	$\frac{1}{0}$.	$\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{1}{6}$.	$\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{3}{6} - \frac{1}{8}$.	$\frac{1}{2} - \frac{4}{4} + \frac{6}{6} - \frac{4}{8} + \frac{1}{10}$,	&c.
Hoc est	$\frac{1}{0}$.	$\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{6}$.	$\frac{1}{8}$.	$\frac{1}{10}$.	&c.

53. Sin hi loci pro paribus habeantur, & fiat congrua interpolatio pro locis imparibus, (juxta progressionis analogiam,) prodibit ea quæ sequitur rationum series. Nempe series Primanorum a respective ducta in

seriem	0.	Recipr: √Resid.	Unitatum.	√Residuorū.	Residuorū.	√qCub. Resid.	Quadr: Resid.	√:Sursol. Resid.	Cub: Resid.	&c.
dat rationes	$\frac{1}{0}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{3}$.	$\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{5}$.	$\frac{1}{6}$.	$\frac{1}{7}$.	$\frac{1}{8}$	&c.

54. Adeoque series $a\sqrt{:D^2 - a^2}$ (nempe series Primanorum in Radices Quadraticas Residuorum,) erit ad seriem Æqualium, hoc est, ad totidem D^2, ut 1 ad 3; (quod etiam superius demonstravimus alias ∽ 12, 13.) Et series $aD^2 - a^3$ in $\sqrt{:D^2 - a^2}$: sive $a\sqrt{:D^6 - 3a^2D^4 + 3a^4D^2 - a^6}$: (nempe series Primanorum in seriem Radicum Quadraticarum Cuborum ex Residiis $D^2 - a^2$;) ad seriem Æqualium, hoc est, ad totidem D^4, est ut 1 ad 5. Adeoque & series $\frac{aD^2 - a^3}{D^2} \sqrt{:D^2 - a^2}$: ad totidem D^2, erit item ut 1 ad 5. Quod demonstrandum suscepimus ∽ 20. Adeoque absolvimus omnia quæ ad centrum gravitatis superficiei ex

ex ſemiconverſione curvæ A C (fig.1.vel 8) circa A F, deſignandum requiruntur.

Superficiei, ſemiconverſione circa C F factæ, centrum; quantum diſtat ab A F.

55. Supereſt, ut centrum gravitatis ſuperficiei, quæ ſemiconverſione ejuſdem C A curvæ circa C F converſæ deſcribitur, inveſtigemus. Quod quidem jam partim peractum eſt. Quum enim (propter binarum quantitatum reciprocationes, ut aliquoties dictum eſt,) idem ſit, reſpectu rectæ A F, momentum ſuperficiei quæ converſione C A curvæ circa C F deſcribitur; atque, reſpectu rectæ C F, momentum ſuperficiei quæ ejuſdem circa A F converſione deſcribitur: Sitque hoc ſuperius inventum ∽ 23: Etiam illud ſimiliter inventum erit.

Fig. 8.

56. Invenimus utique (∽ 23) facta ex omnibus Z X in Z Y fig. 8. reſpectivè ductis (curvâ C A in punctis Z æqualiter diviſâ,) eſſe $\frac{2}{3}D^2P - \frac{52}{45}D^3$. Adeoque (pro Radiis reſtituendo ubique Peripherias, hoc eſt, dividendo per $\frac{1}{2}D$ & multiplicando per P,) erit $\frac{4}{3}DP^2 - \frac{104}{45}D^2P$ momentum circulorum omnium punctis Z deſcriptorum, ſive radiis ZX in diſtantiis ZY ſuſpenſorum, ſive radiis Z Y in diſtantiis Z X ſuſpenſorum; hoc eſt, ſuperficiei converſione C A curvæ circa A F deſcriptæ, reſpectu rectæ C F; vel, converſione circa CF, reſpectu rectæ A F.

57. Hoc itaque ſuperficiei momentum converſione circa CF deſcriptæ, ſi per ejuſdem magnitudinem, hoc eſt, per $2P^2 - \frac{16}{3}RP$ (ut ſupra ∽ 16,) vel $2P^2 - \frac{8}{3}DP$, dividatur; habebitur $\frac{30P - 52D}{45P - 60D}D$ diſtantia centri gravitatis ſuperficiei converſione (vel ſemiconverſione) curvæ C A circa C F deſcriptæ, ab A F recta.

Quantum diſtat à CF.

58. Quantum autem idém gravitatis centrum (ſuperficiei ex ſemiconverſione C A curvæ circa F C deſcriptæ) ab F C diſtat, ſic inquirimus. Semiperipheriarum punctis Z fig. 8. circa F C deſcriptarum, tum magnitudines, tum & earundem centrorum gravitatis ab F C diſtantiæ, ſunt rectis Z Y proportionales. Ergo ſingularum momenta reſpectu ejuſdem F C, ſunt ut quadrata rectarum Z Y fig. 8. hoc eſt (per ∽ 8) rectarum V v fig. 10. Adeoque omnium momenta ſunt ad momenta totidem radio F A deſcriptarum; Hoc eſt, momentum ſuperficiei quæ ſemiconverſione curvæ C A fig. 8. circa F C deſcribitur, ad momentum

Fig.8, 10.

ſuperficiei

ſuperficiei ſemicylindricæ rectâ CA æquali deſcriptæ, diſtantiam à converſionis axe habentis ipſi FA æqualem; ut omnia quadrata Vv fig. 10. ad totidem quadrata A F; hoc eſt, ut omnia VZq + 2VZ × Zv + Zvq, ad totidem AFq.

59. Quam autem habent rationem omnia Zvq ad omnia AFq, ſic colligitur. Eſt recta Zv = $\frac{a\sqrt{:D^2 - a^2}}{D}$ (per ∽ 11,) ergo Zvq = Fig. 10. $\frac{a^2 D^2 - a^4}{D^2}$. Sed omnia $a^2 D^2$ ad totidem D^4, ſunt ut 1 ad 3; & omnia a^4 ad totidem D^4, ut 1 ad 5: Ergo omnia $a^2 D^2 - a^4$ ad totidem D^4, ut $\frac{1}{3} - \frac{1}{5}$ ad 1, ſive ut 2 ad 15. Adeoq; omni: $\frac{a^2 D^2 - a^4}{D^2}$ ad totidē D^2, hoc eſt (propter CA = 2D) ad 2D^3, ut 2 ad 15. Ideoque $\frac{4}{15} D^3$ aggregatum omnium Zvq.

60. Deinde omnia VZq ad totidem AFq, ſunt ut omnes circuli radiorum ZV ad totidem circulos radiorum A F: hoc eſt, ut ſolidum converſione trilinei CZAF circa CA deſcriptum, ad ſolidum deſcriptum ſimili converſione circumſcripti Parallelogrammi; hoc eſt, ut momentum ejuſdem Trilinei ad momenti circumſcripti Parallelogrammi, reſpectu ejuſdem C A rectæ; hoc eſt, ut momentum Trilinei B c C fig.7. ad momentum B C parallelogrammi ſibi circumſcripti, reſpectu rectæ cB; hoc eſt, ut $P^2 - 8D^2$ ad P^2. Nam trilinei CBb magnitudo eſt $\frac{1}{4}D^2$; ejuſque centri gravitatis a c B diſtantia, (eadem utique cum diſtantia centri gravitatis trilinei CBF ab eadem cB,) eſt $\frac{1}{2}D$, (per § 99;) Adeoque momentum $\frac{1}{4}D^2 \times \frac{1}{2}D = \frac{1}{8}D^3$: Quod quidem momentum ſi ex Parallelogrammi CB momento, $\frac{1}{64}DP^2 = \frac{1}{8}DP \times \frac{1}{8}P$, auferatur; relinquit $\frac{1}{64}DP^2 - \frac{1}{8}D^3$, momentum trilinei BcC reſpectu B c rectæ. Quod itaque ad $\frac{1}{64}DP^2$ momentum C B parallelogrammi, eſt ut $P^2 - 8D^2$ ad P^2, ſive ut FAq − 2FCq ad FAq.

61. Quod ipſum ſic etiam probamus alias. Si duci intelligatur, Fig.7. in fig.7. recta CA (quam per B tranſituram certum eſt) Triangulum rectilineum CAF æquale fiet Trilineo C Z A F miſtilineo: Quod quidem miſtilineum a rectilineo in hoc tantum differt, quod ſegmentum illud B A curvâ & rectâ comprehenſum, a ſitu B A in ſitum BC transfertur. Ex hac autem dicti ſegmenti tranſlatione, quod oritur diſcrimen hoc eſt: Solidum ex converſione trilinei miſti circa FC ortum, eſt (per § 83) $\frac{1}{8}P^3 - 2R^2P$, ſive $\frac{1}{8}P^3 - \frac{1}{2}D^2P$; Solidum ſeu Conus ex ſimili converſione

ſione trianguli rectilinei eſt $\frac{1}{12}P^3$, (nam circulus radii R eſt $\frac{1}{2}RP$; ergo circulus radii $\frac{1}{2}P$, utpote in radiorum ratione duplicatâ, eſt $\frac{1P}{8R}P^2$ vel $\frac{P}{4D}P^2$; qui circulus, cum ſit coni baſis, ductus in $\frac{1}{3}D$ trientem altitudinis, dat $\frac{1}{12}P^3$ magnitudinem coni:) Horum ſolidorum differentia, nempe exceſſus coni ſupra reliquum ſolidum, eſt $\frac{1}{2}D^2P - \frac{1}{24}P^3$. Sin utrobique, pro circulorum peripheriis ſubſtituamus radios, (facta diviſione per P, & multiplicatione per $\frac{1}{2}D$,) habebimus planorum momenta reſpectu rectæ CF; nempe illic $\frac{1}{16}DP^2 - \frac{1}{4}D^3$, hic vero $\frac{1}{64}DP^2$; adeoque momentorum differentiam $\frac{1}{4}D^3 - \frac{1}{48}DP^2$. Hæc vero differentia per ſegmenti magnitudinem diviſa, hoc eſt per $\frac{1}{4}D^2 - \frac{1}{16}DP$, (eſt enim trilineum miſtum BbC $= \frac{1}{4}D^2$, unde ſi auferatur triangulum ſibi inſcriptum, quod eſt circumſcripti parallelogrammi dimidium, adeoque $\frac{1}{16}DP$, manebit $\frac{1}{4}D^2 - \frac{1}{16}DP$ magnitudo ſegmenti BA vel BC rectâ & curvâ comprehenſi;) dat $\frac{12D^2 - P^2}{12D - 3P}$ menſuram promotionis centri gravitatis, dicti ſegmenti tranſlocati, verſus F C rectam: Cujus itaque ſemiſſis $\frac{12D^2 - P^2}{24D - 6P}$ eſt ejuſdem centri diſtantia a recta cBβ: Quæ quidem diſtantia, in ſegmenti magnitudinem $\frac{1}{4}D^2 - \frac{1}{16}DP$ ducta, dat $\frac{1}{8}D^3 - \frac{1}{96}DP^2$ ejuſdem momentum reſpectu cBβ rectæ. Momentum autem trianguli rectilinei BcC reſpectu ejuſdem cB rectæ eſt $\frac{1}{192}DP^2 = \frac{1}{16}DP \times \frac{1}{12}P$. Unde ſi auferatur ſegmenti dicti momentum $\frac{1}{8}D^3 - \frac{1}{96}DP^2$; manebit $\frac{1}{64}DP^2 - \frac{1}{8}D^3$ momentum trilinei miſti B c C reſpectu rectæ c B. Eſt autem totius BC Parallelogrammi, reſpectu ejuſdem cB, momentum $\frac{1}{64}DP^2 = \frac{1}{8}DP \times \frac{1}{8}P$. (Unde obiter liquet, reſidui B C b trilinei momentum eſſe $\frac{1}{8}D^3$; adeoque, propter ipſius magnitudinem $\frac{1}{4}D^2$, diſtantiam ſui centri gravitatis à c B eſſe $\frac{1}{2}D$; & conſequenter, a bC erit $\frac{1}{4}P - \frac{1}{2}D$, ut ſupra § 99.) Ratio igitur momenti trilinei miſti BcC, ad momentum circumſcripti Parallelogrammi, (reſpectu ejuſdem c B rectę,) eſt ut $\frac{1}{64}DP^2 - \frac{1}{8}D^3$ ad $\frac{1}{64}DP^2$; ſive, ut $P^2 - 8D^2$ ad P^2: ut prius.

62. Vel denique, ſic etiam eadem ratio inveſtigabitur. Momentum trilinei miſti CZAF fig. 7. reſpectu rectæ C F eſt (ut ſupra) $\frac{1}{16}DP^2 - \frac{1}{4}D^3$. Momentum autem ęqualis parallelogrammi

 mi

mi C β, respectu ejusdem C F, est $\frac{1}{32}DP^2 - \frac{1}{4}DP \times \frac{1}{8}P$. Horum momentorum differentia $\frac{1}{32}DP^2 - \frac{1}{4}D^3$ (cum ex sola trilinei B β A in situm B c C translatione oriatur) si per $\frac{1}{8}DP - \frac{1}{4}D^2$ (trilinei B c C magnitudinem) dividatur; prodibit $\frac{P^2 - 8D^2}{4P - 8D}$ mensura promotionis centri gravitatis trilinei B β A in situm BcC translati. Hujus igitur semissis $\frac{P^2 - 8D^2}{8P - 16D}$ erit ejusdem centri a cB distantia: Quæ in $\frac{1}{8}DP - \frac{1}{4}D^2$ magnitudinem ducta; dat $\frac{1}{64}DP^2 - \frac{1}{8}D^3$ ejusdem b c C trilinei momentum respectu c B rectæ. Vel, quod eodem recidit, differentiæ momentorum inventæ $\frac{1}{32}DP^2 - \frac{1}{4}D^3$, semissis $\frac{1}{64}DP^2 - \frac{1}{8}D^3$, est trilinei translocati momentum quæsitum. (Nam Quotientis dimidium, in Divisorem ductum, restituit Dividui semissem.) Unde eadem quæ prius oritur ratio $\frac{1}{64}DP^2 - \frac{1}{8}D^3$ ad $\frac{1}{64}DP^2$, sive $P^2 - 8D^2$ ad P^2; quæ ∽ 60 quærebatur.

63. Hac itaque ratione inventa, sic procedimus. Quadratum A F fig. 10. est $\frac{1}{4}P^2$ quod ductum in C A = 2 D, dat $\frac{1}{2}DP^2$ aggregatum omnium AFq. Si fiat itaque (propter rationem modò inventam) ut P^2 ad $P^2 - 8D^2$, sic $\frac{1}{2}DP^2$ ad quartum; erit illud $\frac{1}{2}DP^2 - 4D^3$ aggregatum omnium ZVq.

64. Superest ut inquiramus, quam ad eadem omnia AFq, rationem habeant, omnia bina rectangula 2 V Z × Z v fig. 10. (∽ 58 memorata;) hoc est, omnes VZ in 2 Zv, hoc est (per ∽ 11)
Fig.10. omnes V Z in $\frac{2a\sqrt{:D^2 - a^2}}{D}$: Hoc est, omnes VZ in $\frac{\sqrt{:D^2 - a^2}}{D}$: in $2a$. Quam rationem his passibus investigamus.

65. Rectæ ZV trilinei CZAF fig. 10. sunt rectis VZ trilinei
Fig.7. EVcC fig.7. proportionales: Item rectæ CZ = $2a$ fig.10. rectis BV fig.7. Et $\frac{\sqrt{:D^2 - a^2}}{D}$: rectis zY quadrantem CbG complentibus proportionales. Omnes igitur VZ in $\frac{\sqrt{:D^2 - a^2}}{D}$: sunt ut omnia rectangula VZ×zY fig.7. Quæ iterum in $2a$ ductæ, sunt ut horum rectangulorum momenta respectu rectæ Fb fig. 7. Quantum autem sit horum omnium momentum sic colligimus.

66. Intelligatur primò super planum trilinei C Z A F fig. 7. erigi semicirculum C b F ad angulos rectos; ita quidem ut C F dia-

diameter femicirculi, congruat C F lateri trilinei. Deinde fuper idem planum, moveri intelligatur idem femicirculus invariato angulo, a C F ad C β, & fic deinceps ufque ad A; hoc motu defcribens Semicylindrum: Quem Semicylindrum fi fecet planum rectæ A C perpendiculariter infiftens, abfcinditur Semicylindri Portio (fuper CAF triangulo jacens) ex infinitis Parallelogrammis conflata, quorum bafes intelligantur ordinatim-applicatæ in bafis Semicylindricæ femicirculo, altitudines arithmetice-proportionales triangulum CAF complentes. Sin eundem femicylindrum fecet fuperficies curvata perpendiculariter infiftens curvæ CZA, abfcindetur Semicylindri Fragmentum (fic enim libet, diftinctionis caufa, vocare) fuper C Z A F trilineo mifto jacens, ex Parallelogrammis item infinitis conflatum, quorum bafes intelligantur eædem zY ordinatim-applicatæ in femicirculo, altitudines vero Zz trilineum CZAF complentes.

67. Hæc autem duo folida, nempe Portio femicylindri, plano abfciffa, & femicylindri Fragmentum, abfciffum fuperficie curvatâ, funt quoad magnitudinem inter fe æqualia. (Propter, tum binas quafvis rectas zY in bafe, utrinque à medio æqualiter remotas, invicem æquales; tum binas ubique his bafium rectis congruentes altitudines, five in trilineo mifto, five in triangulo rectilineo, fimul æquales rectæ AF.) Utrumvis fiquidem Semicylindro ejufdem bafis, femialto, æquale.

68. Sunt autem eadem duo folida, quoad momentum refpectu A F rectæ, inæqualia: Propter tranflatum id totum quod in altero infiftit bilineo BA; ad fitum BC in reliquo.

69. Eft autem Portionis, triangulo rectilineo incumbentis, momentum refpectu A F rectæ, $\frac{3}{256} D^2P^2 = \frac{1}{32} DP^2 \; \frac{3}{8} D$. (Eft enim femicirculus) F b C $= \frac{1}{8} DP$, & femialtitudo $\frac{1}{2}$ AF $= \frac{1}{4} P$, adeoque portionis magnitudo $\frac{1}{32} DP^2$; quæ in $\frac{3}{8} D$ diftantiam centri gravitatis ab AF (per § 57) ducta, dat $\frac{3}{256} D^2 P^2$ portionis momentum.) Fragmenti verò, trilineo mifto infiftentis, momentum refpectu ejufdem AF rectæ, eft (per § 105) $\frac{1}{16} R^2P^2 - \frac{4}{9} R^4 - \frac{1}{4} D^2P^2 - \frac{1}{36} D^4$. Unde fi auferatur Portionis momentũ $\frac{3}{256} D^2P^2$, habetur $\frac{1}{256} D^2P^2 - \frac{1}{36} D^4$ momentorũ differentia.

70. Et confequenter (cum hæc momentorum differentia non aliunde proveniat quam ex fegmenti bilineo B A infiftentis in fitum B C tranflatione,) fi illa momentorum differentia intelli-

gatur per magnitudinem translocatæ partis divisa, unde habeatur mensura promotionis centri gravitatis quantum ad A F rectam; hujusque semissis, distantia utique ejusdem centri à Bb, in eandem magnitudinem iterum multiplicata; prodibit Dividui semissis, nempe $\frac{1}{512}D^2P^2 - \frac{1}{72}D^4$, momentum istius translocatæ partis, bilineo BC insistentis, respectu rectæ B b.

71. Deinde, super triangulo C B b rectilineo, incumbit cylindri quadrantalis portio, cujus basis CbG quadrans circuli, altitudo $Bb = \frac{1}{4}P$; momentum vero ejusdem respectu rectæ B b, est $\frac{1}{96}D^3P - \frac{1}{512}D^2P^2$. Quod eodem modo colligitur quo supra (∽ 35 & seqq.) colligitur momentum ejusmodi portionis FYυζz fig. 5. Cum enim illic ∽ 39 habetur $\frac{1}{24}D^4 - \frac{1}{128}D^3P$ momenti augmentum (ob dictę portionis ibidem translationem) respectu rectæ F A (si nempe intelligatur Y F A planum horizonti parallelum) vel rectæ F φ (si scilicet planum Y F φ horizonti parallelum intelligatur:) Adeoque ejusdem semissis $\frac{1}{48}D^4 - \frac{1}{256}D^3P$, portionis dictæ momentum respectu rectæ Y z vel Yυ (prout hæc vel illa intelligatur horizonti parallela,) positâ quidem (quod illic supponitur) segmenti altitudine $Y\upsilon = \frac{1}{2}D$: Unde, si posita fuisset $Y\upsilon = \frac{1}{4}P$ (prout jam in casu simili supponimus super æqualem basem portionis altitudinem $Bb = \frac{1}{4}P$) fuisset ejusdem momentum respectu rectæ Yz vel Yυ, $\frac{1}{96}D^3P - \frac{1}{512}D^2P^2$: Quod igitur est momentum portionis Cylindri quadrantalis, triangulo C B b incumbentis, respectu rectæ Bb fig. 7.

72. Totius autem Cylindri quadrantalis, parallelogrammo BC incumbentis, momentũ respectu ejusdem Bb rectæ, est $\frac{1}{96}D^3P = \frac{1}{64}DP^2 \times \frac{2D^2}{3P}$. Unde si auferatur tum momentum solidi bilineo BC insistentis, $\frac{1}{512}D^2P^2 - \frac{1}{72}D^4$ (∽ 70;) tum $\frac{1}{96}D^3P - \frac{1}{512}D^2P^2$ (∽ 71) momentum portionis semicylindri triangulo CBb incumbentis; hoc est, $\frac{1}{96}D^3P - \frac{1}{72}D^4$ momentum solidi totius trilineo misto CBb incumbentis; manebit $\frac{1}{72}D^4$ momentum (respectu ejusdem B b rectæ) solidi insistentis trilineo misto BcC fig. 7. nempe solidi ex omnibus VZxzY fig. 7. Quod ∽ 65 proponitur inquirendum.

Fig. 7, 10. 73. Hoc habito; propter tum AF fig. 10. duplam rectæ c C fig. 7. adeoque & ZV fig. 10, duplas rectarum VZ fig. 7. tum $\sqrt{:D^2}$

$-A^2$

$-a^2$ (propter D duplam rectæ GC fig. 7.) duplas rectarum z Y fig. 7. adeoque singula $\sqrt{:D^2 - a^2}$: in ZV fig. 10. quadrupla singulorum BV×ZV fig. 7. Et (propter altitudinem CA fig. 10. quadruplam altitudinis cB fig. 7.) omnia omnium sedecupla (est enim 4×4 = 16:) Et denique (propter eandem AC = 4 cB) distantiam centri gravitatis à cC fig. 10. quadruplam distantiæ à B b fig. 7. erit (propter 16×4 = 64) momentum ad momentum ut 64 ad 1. Adeoq; omnes VZ *fig.* 10. *in* $\sqrt{:D^2 - a^2}$: *in* $2a$, $= \frac{8}{9}D^4$; (nempe ad momentum omnium VZ×zY×bV fig. 7. hoc est $\frac{1}{72}D^4$ per præced. ut 64 ad 1.) Et propterea, factâ applicatione ad D, omnes VZ (fig. 10.) in $\frac{2a\sqrt{:D^2 - a^2}}{D}$: hoc est, omnia 2VZ×Zv bina rectangula (§ 58 memorata) $\frac{8}{9}D^3$. Quod § 64 proponitur inquirendum.

74. Cum igitur sint omnia Zvq (per § 59) $\frac{4}{15}D^3$, & omnia ZVq (per § 63) $\frac{1}{2}DP^2 - 4D^3$, & denique omnia 2VZ×Zv (per § 73) $\frac{8}{9}D^3$. Erunt omnia VZq+2VZ×Zv+Zvq fig. 10. $\frac{1}{2}DP^2 - \frac{128}{45}D^3$. Omnia vero AFq sunt $\frac{1}{2}DP^2 = \frac{1}{4}P^2 \times 2D$. Eorum igitur ad hæc ratio constat; nempe ut $\frac{1}{2}P^2 - \frac{128}{45}D^2$ ad $\frac{1}{2}P^2$, sive ut $45P^2 - 256D^2$ ad $45P^2$. Quam quidem eandem esse quam habet momentum superficiei ex semiconversione curvæ CA fig. 8. circa CF, ad momentum curvæ semicylindricæ ejusdem basis, altitudinis vero $2D$ = CA respectu rectæ CF sive plani per axem; jam § 58 ostensum est. Est autem istius magnitudo (per § 16) $P^2 - \frac{8}{3}RP$ sive $P^2 - \frac{4}{3}DP$; hujus autem P^2 (quod nempe fit ex altitudine $2D$, in $\frac{P^2}{2D}$ semiperipheriam radio AF $= \frac{1}{2}P$ descriptam:) adeoque illius ad hanc ratio, ut $P - \frac{4}{3}D$ ad P, sive ut $3P - 4D$ ad $3P$. Ideoque propter

$$\frac{3P - 4D}{3P} \Big) \frac{45P^2 - 256D^2}{45P^2} \Big(\frac{45P^2 - 256D^2}{45P^2 - 60DP},$$

distantiarum centrorum gravitatis ratio est, ut $45P^2 - 256D^2$ ad $45P^2 - 60DP$. Est autem centri gravitatis expositæ curvæ semicylindricæ à plano per axem distantia D, (nempe radii AF $= \frac{1}{2}P$ ea pars quæ est ad totam, ut chorda ad arcum, hoc est ut D ad $\frac{1}{2}$P;) Et propterea $\frac{45P^2 - 256D^2}{45P^2 - 60DP}D$ distantia centri gravitatis superficiei

perficiei ex semiconversione curvæ CA circa CF ab eodem plano sive à CF recta. Quod erat ultimo inquirendum.

APPENDIX.

Cum ex Wrennii nostri Demonstratis de Cycloidibus (quæ sub initium Julii anni 1658 amicis quibusdam ostendit) Semicycloidis curvam Axis duplam esse ∽ 1 assumpserim: Istius demonstrationẽ prout eam ab eodem D. *Christophero Wren*, Socio Collegii *Omnium Animarum* dicti, Oxoniæ, & in Collegio *Greshamensi*, Londini, Astronomiæ Professore, acceperim, visum est hic subjunctam exhibere.

De rectâ Tangente Cycloidem primariam.

Lemma.

Fig. 13. SI sit Circulus A o D, Diameter A D, tangens VD, & o V subtensæ cuivis D o ad rectos angulos. Dico Tangentem esse Arcu o p D majorem. Ducatur Tangens o T. Quoniam anguli ToD, TDo sunt æquales, ergo anguli ToV, TVo sunt æquales. Ergo VTD æqualis est OT, TD simul sumptis. Sed ipsæ oT, T D superant arcum opD. Ergo VD major est Arcu opD.

II. Iisdem positis si ducatur u r p e (vel $\upsilon\,\varrho\,\varpi\,\iota$) tangenti VD parallela: dico segmentũ externum u p, esse arcu p o, (vel $\upsilon\,\varpi$ arcu $\varpi\,\omega$) majus: segmentum vero internum p e esse arcu p o (vel $\varpi\,\iota$ arcu $\varpi\,\omega$) minus. Ducatur subtensa p o (vel p ω) & p m (vel $\varpi\,\mu$) subtensæ ad rectos angulos. Angulus igitur o p u vel acutus est, vel obtusus ut $\omega\,\pi\,\upsilon$.

Sit primo obtusus. Quoniam anguli VDω, $\varrho\,\omega$ D sunt æquales, & $\upsilon\,\iota$ parallela ipsi VD, ergo Isosceles est $\varrho\,\omega\,\iota$, ergo $\upsilon\,\varrho$, $\varrho\,\omega$ sunt etiam æquales, & quoniam $\omega\,\varpi\,\varrho$ est obtusus ergo $\omega\,\mu$ minor est $\upsilon\,\varrho$, & adhuc minor ipsâ $\upsilon\,\pi$; sed cùm $\omega\,\mu$ sit tangens, & $\pi\,\mu$ subtensæ ad rectos angulos, ergo demonstratum est $\omega\,\mu$, majorem esse arcu $\omega\,\pi$, ergo $\upsilon\,\pi$ major est arcu $\omega\,\pi$.

Sit secundò angulus u p o acutus, ergo in triangulo o m p, angulus o m p est æqualis recto minus angulo m o p; & in triangulo r p m, angulus r p m, est æqualis recto minus angulo u p o: sed angulus u p o est major angulo u e o, vel angulo m o D: & ang. m o p est minor angulo m o D, ergo

ergo complementum anguli u p o ſcilicet r p m, eſt minus complemento anguli m o p, ſcilicet angulo o m p; ergo in triangulo r p m latus r m, eſt minus latere r p. Sed u r, r o æquales eſſe jam demonſtrantur, ergo u p major eſt ipſâ o m, & o m major arcu o p: ergo u p eſt major arcu o p.

Dico poſtremo ſegmentum internum p e eſſe minus arcu o p. Quoniam enim anguli r o e, r e o ſunt æquales, ergo minor eſt angulus p o e angulo p e o, ergo in triangulo p o e latus p e minus eſt latere p o; recta autem p o minor eſt arcu p o; ergo p e minor eſt arcu p o. Similiter demonſtratur de π ε.

Problema.

Ad datum punctum t in Cycloide s t a d Tangentem ducere. Fig. 14.

Ducatur t o baſi parallela, & per punctum o Genitoris ducatur ſubtenſa a o u, cui parallela ducatur x t y, dico rectam x y tangere in puncto t. Nam ſi non tangat, ergo ſecat in t, ergo cadit intra curvam aut verſus baſim, aut verſus verticem.

Cadat primo ſi fieri poſſit verſus Baſim & ſit punctum aliquod x intra curvam: & ducatur baſi parallela x u p, & producta ſecet curvam in g, & producatur ſubtenſa ad u. Quoniam ergo alibi demonſtratur é primis Cycloidis proprietatibus eſſe quod Parallelæ baſi inter Cycloidem & Genitorem terminatæ, ſint arcubus Genitoris ad verticem abſciſſis æquales: ergo g p eſt æqualis arcui p o p a, & t o arcui o p a, ergo t o plus arcu o p æqualis eſt ipſi g p: ſed x u æqualis eſt ipſi t o, & ſegmentum externum u p eſt majus arcu o p; ergo x u p major eſt ipſis t o, o p ſimul ſumptis: ergo p x major eſt ipſâ p g: ergo cadit extra punctum g curvæ, ergo idem punctum eſt intra & extra curvam, quod eſt abſurdum: ergo non eſt intra. Cadat jam intra curvam verſus verticem; & ſit punctum aliquod y rectæ t y intra curvam. Ducatur baſi parallela y p′e, & producta ſecet Cycloidem in h. Quoniam ergo y e eſt æqualis ipſi t o, & h p′ plus arcu p′o æqualis ipſi t o, & p′e ſegmentum internum eſt minus arcu p′o; ergo h p′e minor eſt ipſis h p′, p′o ſimul ſumptis, ergo minor eſt ipſâ t o ergo e y major eſt ipſâ e h. Ergo punctum y eſt extra & intra curvam quod eſt abſurdum: ergo non eſt intra. Similiter demonſtratur nullum punctum rectæ x y eſſe intra curvam, ergo non ſecat curvam in puncto t; ergo ducta eſt t y tangens Cycloidem in dato puncto t; quod erat faciendum.

Ἐυθυσμῶς

'Ευθυσμὸς Curvæ lineæ Cycloidis primariæ secundum methodum Antiquorum demonstratus.

Definitio.

MAgnitudines in infinitum decrescentes sunt quarum non datur minima.

Problema.

In dato Semicirculo AD'D subtensas quotcunque AD in datâ ratione continuâ disponere. Sit Ratio A M' ad A D. Ducatur circulus AM''M'; tangens in A; & fiat ubique A D (subtensa majoris circuli) æqualis ipsi AM (antecedenti subtensæ minoris circuli.) Dico ipsas A D esse in continuâ ratione ipsius A D ad AM'. Junctis M''M', & D'D, vel M'''M'', & D''D', & sic ubivis; quoniam MM, DD sunt parallelæ, ob æquales in similibus segmentis Angulos: ergo patet propositum.
Fig.15.

Scholium.

Iisdem positis dico hanc subtensarum rationem in infinitum continuari posse. Nam si non possit, ergo datur minima subtensa, quo minor duci non potest: sit ea verbi gratiâ AD'''', secans minorem circulum in M''''; & ducatur ut prius A δ æqualis ipsi A M'''' : ergo A δ est minor minimâ, quod est absurdum; ergo non datur minima, ergo ratio subtensarum potest in infinitum continuari.

Lemma.

Sint tres circuli, tangentes se invicem in puncto A, quorum diametri AE, A F, AG sunt in continuâ proportione. Circulos autem secet recta AMDC; item recta Aμδκ, ita ut Aδ aptetur in medio circulo æqualis ipsi A M minimi Circuli. Per puncta denique δ & D medii circuli, ducatur tam δ N O, diametro perpendicularis, quam Dβ ipsi δN parallela. Dico ipsas NM, μ δ esse æquales: item MD, δ κ: item DC, κ β. Jungantur κC; item μM: item ME. Quoniam AμME est quadrilaterum circulo inscriptum; ergo angulus externus δμM æqualis est opposito interno AEM; sed anguli ANO, AEM ob similitudinem triangulorum sunt æquales: ergo anguli δμM, δNM sunt æquales:
Fig.16.

les: æqualia sunt ergo Triangula $A\delta N$, $A\mu M$; & quoniam βD parallela est ipsi δN, & κC ipsi μM, æqualia sunt etiam Triangula $A\beta D$, $AC\kappa$: æquales sunt igitur AN & $A\mu$; AM & $A\delta$; AD & $A\kappa$; AC & $A\beta$: quare demptis continuo æqualibus, æquales erunt NM & $\mu\delta$; MD & $\delta\kappa$; DC & $\kappa\beta$.

Problema.

Datâ mediâ trium proportionalium, & differentiâ extremarum, dare extremas. Fig.17.

Sit media data A D, eique ad rectos angulos ponatur DZ æqualis differentiæ extremarum, & dividatur bifariam in S, centro autem S & intervallo S D describatur circulus $D\mu\kappa$, & per S ductâ $A\mu S\kappa$; ponatur AM æqualis $A\mu$, & AC æqualis $A\kappa$. Quoniam A D tangit circulum, ergo quadratum A D æquale est rectangulo $\mu A\kappa$; ergo AM, AD, AC, sunt in continuâ proportione, & MC (differentia extremarum) æqualis est ipsi DZ.

Lemma.

Si fuerint magnitudines in infinitum decrescentes Summa Differentiarum æquatur maximo Termino. Fig.19.

Sint Magnitudines a Z, b, c, d, &c, in infinitum: dico omnes earum differentias æquari ipsi a Z. Si negetur; sint majores, & fiant $a\beta$, $a\gamma$, $a\delta$, &c. æquales ipsis b, c, d, &c; erunt ergo $Z\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, &c, partes ipsius a Z; non sunt ergo majores Toto. Sint jam minores, quare æquales sint ipsi $Z\delta$, reliquo autem $a\delta$ æqualis ponatur d, ipsi etiam d ponatur $a\varepsilon$ minor: ergo addita est alia differentia $\delta\varepsilon$, quare $Z\varepsilon$ est æqualis summæ omniū differentiarū, ergo $Z\delta$ æqualis est ipsi $Z\varepsilon$, major minori, quod est absurdi. Ergo Z a (cum sit neque major neque minor) æqualis est summæ omnium in infinitum differentiarum.

Lemma.

Binarum magnitudinum differentia, æqualis est differentiæ inter summam & duplum utriusvis. Patet addendo utrique magnitudini minimam, vel utrique maximam.

Definitio.

Polygonum Serratum est figura constans alternatim ex lateribus sibi invicem parallelis, & lateribus obliquis. Sola autem latera non parallela vocentur simpliciter Latera.

Polygonum Serratum circulo Circundari dicitur, quando unusquisque angulus internus circulum attingit. Atque idem circulo inseri dicitur, quando unusquisque angulus externus circu- Fig.17.

lum attingit, & angulum internum polygoni circundati ad verticem habet.

Problema.

Polygonum Serratum semicirculo dato inserere, cujus summa laterum sit duplo diametri minor; atque aliud circundare cujus summa laterum sit duplo diametri major; ita tamen ut utriusque summæ differentia sit datæ cuicunque magnitudini æqualis.

Sit semicirculus datus A D D, cujus diameter sit A D; magnitudo data X. Data igitur mediâ proportionalium A D, fiant A M', A D, A C continue proportionales, ita ut differentia extremarum M' C, æqualis sit ipsi X. Disponantur autem subtensæ A D ubique in datâ ratione A D ad A M', & continuetur ratio in infinitum. Productis deinde subtensis, per unumquodque D ducantur parallelæ N D B, ad proximam utrinque subtensam. Patet ex iis quæ dicta sunt, Polygonum semicirculo insertum esse. Atque aliud circundatum. Dico autem insuper latera Inserti simul sumpta (scilicet omnes in infinitum DN) deficere à duplo diametri defectu D M'; Latera vero circundati (scilicet omnes in infinitum B D) excedere duplum diametri, excessu D C: differentiam denique laterum utriusque polygoni æqualem esse datæ magnitudini X.

Diametris A M' & A C, ducantur circuli tangentes etiam in A & secantes subtensas in M & C ubique. Quoniam ergo subtensæ A D disponuntur in datâ ratione AD ad A M'; ergo A M' (antecedentis subtensæ) æqualis est (consequenti) A D'; ergo M' N' (antecedentis) æqualis est ipsi D' M'' (consequentis) & sic ubique: ergo differentia ipsarum D M', M' N' (ejusdem subtensæ) æqualis est differentiæ ipsarum D M', D M'' (antecedentis & consequentis:) Ipsæ vero D M cum sint magnitudines in infinitum decrescentes differentiarum summam æqualem habent maximæ D M; ergo summa omnium D M minus M N (ejusdem subtensæ,) æquatur maximæ D M. Sed quoniam D M' minus M' N', æqualis est duplo D M' minus D N' & sic ubique; & quoniam summa omnium D M, cum sint differentiæ subtensarum in infinitum decrescentium, æquatur maximæ A D (scilicet diametro:) Ergo duplum summæ ipsarum D M (hoc est duplum diametri) minus summâ Laterum D N, æqualis est ipsi D M'. Ergo omnium polygoni Inserti Latera deficiunt à duplo diametri defectu D M'.

Rursus

Rursus quoniam A M', A D, A C sunt in continuâ proportione; ergo C' D' (antecedentis subtensæ) æqualis est ipsi B'' C'' (consequentis) & sic ubique. Ergo (eodem modo quo supra) demonstratur, quod duplum summæ ipsarum B C (hoc e . duplum subtensæ AB') minus summâ laterum B D, æqualis sit maximæ B' C'; ergo omnia Polygoni circundati latera deficiunt a duplo subtensæ AB', defectu B' C'. Sed A B' æqualis est ipsi A C, & B' C' ipsi C D. Ergo omnia Polygoni circundati latera superant duplum Diametri excessu D C.

Addatur demum defectus, & excessus quibus, hinc inde polygona differunt à duplo diametri; ergo C M' est utriusque differentia; & æqualis quidem ponitur ipsi X. Ergo semicirculo A D D polygonum serratum insertum est, & simile est circundatum, hoc majus, illud minus duplo dimetri, utriusque autem differentia æqualis est datæ magnitudini X. Quod erat faciendum.

Scholium.

Dato circuli segmento quovis A ♪ D', eodem prorsus modo polygonum serratum inseritur & circundatur; & demonstratur latera inserti deficere à duplo basis segmenti A D', defectu D' M''; Latera vero circundati excedere duplum ejusdem, excessu D' C'; utriusque vero differentiam esse C' M''; quæ cum minor sit quam C M', minor est quam X.

Lemma.

Si à puncto quovis O in Cycloide primariâ S P O A D, ducatur Tangens O V versus Basin, item basi parallelæ N O D, & V P C secantes Genitorem in D, C, quibus A jungatur, & ducatur O E, parallela ipsi A C. Dico tangentem O V majorem, ipsam vero O E minorem esse portione Curvæ inter parallelas interceptæ O P.

Ducatur P I N ipsi O E parallela, item, subtensa portionis P O. Quoniam angulus P E O est obtusus (cum sit æqualis ipsi P C A) ergo E O minor est rectâ P O, ergo minor etiam curvâ P O.

Rursus quoniam P N parallela est ipsi A C, ergo tangit Cycloidem in puncto P, & quoniam angulus V P T est obtusus, ergo T P minor est ipsa T V, ergo O T V major est ipsis O T, T P, simul sumptis, ergo major est portione O P.

Definitio.

Polygonum ferratum Cycloidi circumfcribi dicitur quando unufquifque angulus internus Cycloidem contingit, atque idem inferi dicitur quando unufquifque externus attingit.

Theorema.

Curva linea Cycloidis primariæ eft quadrupla diametri Genitoris.

Fig. 18. Sit Curva femicycloidis o o A, cujus Bafis fit o D, Diameter A D tam Cycloidis quam Genitoris A ♪ D′ D. Dico curvam o o A effe duplam ipfius A D. Si negetur fit Curva vel major vel minor duplo A D. Et fit five exceffus, five defectus X.

Genitori polygonum ferratum inferatur, atque aliud circundetur, ita ut differentia fummæ laterum utriufque fit æqualis ipfi X. Et producantur parallela Polygonorum latera N D B ut fecent curvam in o o. Et ductis tangentibus o u, o u circumfcribatur Cycloidi polygonum ferratum infinitum. Et ab iifdem punctis o ductis o e, o e′, ita ut quæque parallela fit ei fubtenfæ A D quæ in eandem e D parallelam incidit, inferatur Cycloidi polygonum ferratum infinitum. Quoniam igitur ipfæ o u tangunt Cycloidem, ergo parallelæ funt & æquales ipfis D B fingulæ fingulis; & quoniam ipfæ o e parallelæ funt, & æquales ipfis N D, ergo latera polygoni Cycloidi circumfcripti æqualia funt lateribus polygoni quod Circulo circundatur, & latera polygoni cycloidi inferti, ejus quod circulo inferitur. Quare latera polygoni circumfcripti fimul omnia excedunt duplum diametri exceffu D C, fcilicet minore quam X, & curva quidem adhuc minor eft: & latera polygoni Cycloidi inferti deficiunt à duplo diametri defectu D M′, fcilicet minore quam X, & curva quidem adhuc major eft. Atque idem demonftratur dato quovis defectu vel exceffu X. Ergo Curva femicycloidis non eft major neque minor duplo diametri. Ergo curva Cycloidis primariæ eft quadrupla Diametri Genitoris. Quod erat demonftrandum.

Corollarium.

Eodem prorfus modo demonftratur, portionem quamcunque curvæ, à vertice abfciffam, ut o′ o A, duplam effe fubtenfæ A D′, fcilicet quæ à fectione Bafis portionis, & genitoris ducitur.

De

De Dimensione Cycloidum Contractarum & Protractarum.

Proprietates quædam Cycloidum.

SUper eandem Basim GM constituantur tres Cycloides genere differentes, scilicet GaMA Primaria, cujus genitor est AHD: Fig. 20. GoOM Cyclois quædam Contracta, cujus genitor est OFD: & GeEM, Cyclois quædam Protracta, cujus genitor est EKD.

Primò, quoniam Cyclois cujusvis generis fit ex motu æquabili in peripheriâ genitoris, dum interim genitor motu æquabili transfertur, super datam basim, donec punctum generans circulum absolverit, à puncto contactus incipiens & ad idem rediens: Ergo utrique Motus, tam circularis quam rectus, erunt ubique in eadem ratione. Quare in omni Cycloide, si ducatur Basi parallela à Genitore ad curvam, ut FX, vel HY, vel KZ; erit ut motus in arcu OF, ad motum in semicirculo OFD, ita motus rectus FX, ad semissem totius motus recti, scilicet semibasim DM. Similiter ut arcus AH ad semicirculum suum AHD, ita HY ad semibasin. Idem dicitur de arcu EK & rectâ KZ.

Quare positis in directum punctis DKHF, quoniam arcus OF, AH, EK sunt in eâdem ratione ad semicirculos suos, erunt rectæ FX, HY, KZ. In eadem ratione ad communem basim DM; sunt ergo æquales, & puncta Cycloidum XYZ in directum posita sunt; rectæ igitur XYZN, FHKD, sunt æquales, & similiter sectæ & positæ: sed FD & OD similiter sectæ sunt: ergo *rectæ* XYZN, OAED *similiter sectæ sunt à Curvis Cycloidum.*

Secundò, quoniam angulus ODF est ad rectum, ut arcus OF ad semicirculum suum, seu ut FX vel DN ad DM; ergo, *ut* MN *ad* DM, *ita angulus* MNX *ad Rectum.*

Tertio, jungantur HA, eique parallela ducatur YQ. Quoniam demonstratum est YQ tangere Cycloidem primariam in Y: ergo NY *cadit normaliter in Curvam primariæ.*

Theorema.

Curva Cycloidis primariæ est quadrupla Diametri: & portioni cuivis assignatur recta æqualis.

SIt semibasis GD divisa in partes æquales mm indefinitè minimas; & à punctis m incidant ubique in primariam nor-

 maliter

militer rectæ m a, & in proxime majorem m a rectæ m u: ducantur, D n (subtensa genitoris) & m z, parallelæ ipsi m′ a′; item A n, a′ z, a″ s parallelæ: quare a′ z tangit Cycloidem in a, & parallela & æqualis est ipsi m″ u′. Quoniam igitur ipsæ m a (quum sint æquales & parallelæ subtensis genitoris) sunt sinus angulorum suorum a m G ad Radium A D; & in Triangulis rectangulis m u m, latera m u sinus eorundem angulorum ad Radium m m; ergo est ut A D ad m″ m′, ita m′ a′ ad m″ u′, vel a′ z. Et quoniam anguli a m G æqualiter sese excedunt, ergo in Triangulis similibus A D n, a″ m″ s, est ut A D ad A n ita m″ a″ ad a″ s, & (quum A n sit indefinite minima, & propterea æqualis arcui A n, sive ipsi m″ m′) est ut A D ad m″ m′, ita m″ a″ ad a″ s; erat autem ut A D ad m″ m′, ita m′ a′ ad a′ z; quare est ut m′ a′ ad m″ a″, ita a′ z ad a″ s, sed differentia inter a′ m′ & a″ m″ est ad a′ m′ data quavis ratione minor, ergo a′ z, a″ s sunt æquales, & simul sumptæ portioni curvæ a″ a′ æquales. Est ergo portio a″ a′ duplum ipsius m″ u′: atque idem ubique demonstratur. Omnes igitur a a sunt duplæ omnium m u. Et si abscindatur à vertice portio quælibet A a″, ea dupla est omnium m u quæ sunt inter D & m″: Sed omnes m u (quum ipsi m u sint sinus complementi, quorum sinus recti sunt u m) sunt æquales omnibus u m: omnes autem u m (quum sint differentiæ ipsarum m a) sunt æquales maximæ m a, hoc est ipsi A D. *Ergo semicurva* A a g *dupla est diametri* A D. Et quoniam omnes u m inter G & m″, sunt æquales maximo sinui scilicet m″ a″; ergo omnes m u inter G & m″ sunt æquales sinui complementi ipsius m″ a″. Quare Portio quælibet ut A Y (cujus normalis N Y est sinus rectus anguli Y N M ad radium A D) dupla est sinus complementi A H.

Curvis Cycloidum Protractarum & Contractarum assignantur semiellipses æquales.

IN Cycloide contractâ G o O M, demittantur ubique o g perpendiculares in proxime majorem o m, cui parallela ducatur a″ y & junctis o o inscribatur polygonum. Quoniam est ut A D ad A O, ita m″ a″ ad a″ o″, & in Triangulis similibus m″ a″ s, a″ o″ y, est ut m″ a″ ad a″ o″, ita a″ s ad o″ y; ergo est ut A D ad A O, ita a″ s ad o″ y, & converse ut 2 A D, ad 2 A D + A O,

ita

ita 2 a'' s ad 2 a'' s + o'' y, sed 2 a'' s est curvæ portio a'' a', & 2 a'' s + o'' y est o'' g': est ergo ut 2 AD ad 2 AD + AO, ita portio a'' a' ad o'' g'. Quare omnes o g simul sumptæ sunt æquales duplo AD + AO & unaquæque o g est in eadem ratione ad portionem suam a a; & omnis a o, ad suam m a primariæ, hoc est, sunt ao ut sinus recti angulorum suorum G m o ad Radium AO. Quare si ponatur recta PT æqualis duplo AD plus AO, eique ad rectos angulos PQ æqualis ipsi AO, & fiant Pα', Pα'', Pα''', sinus complementi æqualium angulorum ad Radium PT, & ducantur tam α ω, eorundem sinus recti ad Radium PQ, quam γ ω ipsi PT ubique parallelæ & jungantur ω ω; patet ex iis quæ dicta sunt ipsas γ ω æquales esse ipsis g o singulæ singulis, & ipsas α ω ipsis a o, quare ipsæ etiam γ ω æquales erunt ipsis g o, & Triangula rectangula ω ω γ triangulis rectangulis o o g. Ex vulgaribus autem Ellipseos principiis patet Figuram T ω QP esse polygonum quadranti Ellipseos inscriptum; ergo Polygonum Laterum indefinite minimorum quadranti Ellipseos inscriptum, æquale est Polygono Semicycloidi contractæ inscriptum: Ergo *Cycloidis contractæ curva* GoOM, *æqualis est semiellipsi cujus Axis transversus est duplum* AD *plus* AO, *&* *Axis minor* AO.

Eodem modo ductâ e'' x parallelâ ipsis m'' s, demonstratur ut 2 AD ad 2 AD — AE, ita esse 2 a'' s ad 2 a'' s — a'' x (sive ad e'' d) quare procedendo ut supra demonstratur curvam Cycloidis Protractæ æqualem esse semiellipsi cujus Axis transversus est duplum AD minus AE, & Axis minor AE.

Scholium.

PAtet Figuram GoXMYa, Curvis Primariæ & Contractæ terminatam, esse meram semiellipsin in arcum flexam ita ut Axis transversus applicetur Cycloidi Primariæ à parte convexâ: & Figuram GaYMZe, Curvis Primariæ & Protractæ terminatam, esse semiellipsin, cujus Axis transversus applicatur, Primariæ à parte Concavâ; hujus autem axis proportionaliter protrahitur, manente Curvæ Ellipticæ dimensione licet recurvetur, Illius autem proportionaliter contrahitur manente Curva, licet magis curvetur. Patet etiam ipsas o a, & a e esse meras Ellipseωn ordinatas. Quare non est per accidens, Ut Clarissimo Detonvilio placuit, quod Curva Primariæ sit rectæ æqualis, ex eo quod Curvæ obliquarum sint Ellipsibus æquales; sed e contra Curvæ Obliquarum *Epist. ad Hugen. Pag. 7.*

rum

rum Cycloidum sunt Ellipsibus æquales per accidens, ex eo quod earum Axes applicentur ejusmodi Curvæ, quæ ex natura sua sit Euthysmi patiens; quod de nullâ Curvâ, hactenus notâ (ne quidem assumptâ Circuli Quadratura) prius demonstratum fuit, quam ego hæc de Cycloide Primariâ amicis communicaveram; nisi quod Illustris Juvenis Gulielmus Nelius, Curvam quandam ita construendam ut sit Euthysmi capax, summa cum laude invenerit.

De problemate Kepleriano per Cycloidem solvendo.

Asseruit Keplerus, ex causis physicis, planetas ita ferri circa Solem in Orbitâ Ellipticâ, ut velocitas planetæ sit ubique distantiæ ejusdem à Sole reciproce proportionalis; unde sequentem Hypothesin ingeniose commentus est. Secat scilicet aream Ellipseos Planetariæ lineis à sole ductis in infinita Triangula Mixtilinea æqualia; unde fit ut Curva Ellipseos dividatur in portiones inæquales, minores quidem circa Aphelium, majores circa Perihelium: per has autem portiones ponit Planetam æqualibus temporibus ferri. Quare ex Medio motu Anomaliam coæquatam ut indagaret, secanda est semiellipsis per Focum in datâ ratione; vel (quod perinde esse ab eodem demonstratur) secandus est Semicirculus per quodvis punctum Diametri in datâ ratione. Mirum est quantum in hoc problemate sudaverit Keplerus, Orbitas suas ———— *volvens nitendo neque proficit hilum.* Tandem anhelus, Geometrarum opem implorat; interim veritus ne propter arcuum & sinuum ἑτερογένειαν inveniatur Problema inexplicabile. Quod nihilominus ope Cycloidis protractæ nos olim sic exhibuimus.

Problema.

Semicirculum per datum punctum Diametri in datâ ratione secare.

Fig. 21. Sit Semicirculus AKB, cujus Centrum D. Punctum datum C. Ratio data R ad S. Fiant DC, DB, Dβ continue proportionales; & centro D describatur ακβ, cui æqualis ponatur recta BM; datâ autē basi BM, & Genitore AKB, describatur semicyclois Protracta MAB;

M A B; fiat deinde B G ad B M ut R ad S, & ducatur G P ad angulos rectos secans Cycloidem in P, item PF Basi parallela secans Genitorem in E. Jungantur denique EC. Dico mixtilineum A E C esse ad semicirculum ut R ad S. Ducatur radius D E ε; & demittatur ε φ; & jungantur E B.

Quoniam segmenta α ε φ, A E F sunt similia, ergo ut arcus α ε ad ε φ, ita arcus A E ad E F; & quoniam arcus A E ductus in semiradium æqualis est sectori A E D, & semissis basis D B sive semiradius ductus in altitudinem E F æqualis est Triangulo D E B: ergo ut A E ad E F, ita sector A E D ad Triangulum D E B; & ut α ε ad ε φ ita A E D, ad D E B: sed ut ε φ ad E F, ita Triangulum D E B ad Triangulum D E C (quia sunt ut Bases D B, DC:) erit igitur ex æquo ut α ε ad E F, ita sector A E D, ad Triangulum D E C, & converse simul & inverse erit, ut α ε plus E F, ad α ε, ita A E D plus D E C, ad A E D; sed α ε est ad semiperipheriam α κ β, ut sector A E D ad semicirculum A K B; erit igitur ex æquo ut α ε plus E F ad semiperipheriam, ita A E D plus D E C ad semicirculum: sed ex iis quæ demonstrata sunt de Cycloide, quoniam E P est ad Basin B M, ut angulus A B E ad rectum, sive arcus α ε ad semiperipheriam α κ β quæ quidem æqualis est ipsi B M; ergo α ε plus E F æqualis est ipsi F P: est ergo ut F P (vel B G) ad B M (sive ut R ad S,) ita Mixtilineum A E C ad semicirculum A K B. Quare semicirculus A K B per punctum datum C ita secatur a linea C E ut pars sit ad totum in datâ ratione R ad S. Quod erat faciendum.

Scholia.

Quod si punctum C sit in ipsa extremitate Diametri, puncta C, B, β, coincident & Basis B M æqualis est peripheriæ Genitoris; Quare Cyclois est Primaria, & ductis G P, P F eodem modo perficitur Problema, & facilius demonstratur.

Quod si punctum C sit extra circulum productâ Diametro, Cyclois erit contracta, & Mixtilineum A E C, non solum assignatur semicirculo minor in data ratione, sed potest etiam major esse vel æqualis.

Demonstratur à Keplero ex datâ sectione semicirculi à puncto Diametri, posse semiellipsin quoque à puncto Axis transversi in datâ ratione secari; sed idem etiam perficitur à puncto cujusvis Axis.

Hinc patet ex contemplatione Cycloidum ad eundem modum innumera alia problemata perfici posse de segmentis, Triangulis mixtilineis, & Lunulis, sive componantur ex portionibus circularibus, sive ellipticis. Quod indicâsse sufficiat.

Veruntamen, cum Cyclois sit Linea Mechanica non Geometrica; non vere solvuntur problemata, sed Mechanice perficiuntur, non enim magnitudine datur Linea G P; unde intersectio P non datur Geometrice. Fatendum est enim nullas Intersectiones Geometrice dari præterquam Rectarum, & Intersectionem Rectæ & Curvæ (ut quando Recta secat Circulum aut sectionem Conicam) non dari quatenus talis est, sed quatenus est communis intersectio binarum Rectarum in ipsa Curva, ita ut (ex naturâ Curvæ) uniformem quandam ad invicem habeant ubique Relationem, quæ æquatione aliqua possit exprimi. In Cycloide, vero Relatio inter P G & P F, sive inter Arcum majoris circuli Sinumque minoris simul sumptos, & sinum Versum, perpetuo varia est & difformis. Posito autem punctum P dari, non deest contemplationi veritas & pulchritudo Geometrica.

Quicquid perficitur hoc modo per rectam secantem Cycloidem, habetur etiam si circulus secet Evolutæ curvam. Evolutam autem appellamus superficiem Ungulæ Cylindriacæ. Sunt aliæ etiam Curvæ quæ tantundum præstant, quarum etiam intersectiones Geometrice non dantur.

Non inutilis est contemplatio Cycloidum quæ generantur ex circulo super Basim circularem revoluto, hujus generis vocentur Epicycloides, tales enim curvas Planetæ in Epicyclis vecti describunt. Quasdam habent proprietates Cycloidum proprietatibus non absimiles, quasdam diversas & magis perplexas, præcipue Epicycloides Planetariæ, in quibus motus non sunt æquales. Verum hæc omnia prosequi non est præsentis Instituti.

FINIS.



Nobilissimo Doctissimoque Viro,

D. CHRISTIANO HUGENIO, Const. F.

JOHANNES WALLIS S.

DUM ea quæ cum his accipies, Vir Nobilissime, diutinas preli moras exspectabant, literas Tuas 9° Junii datas, post mensem circiter accipiebam. Quæ partim promissa mea, de hisce tibi communicandis pridem facta, memorant; partim libros aliquot à Dettonvilio sive Pascalio editos, (quos Illustrissimus Carcavius distribuendos miserat, huc deferendos curant; quos ego statim atque accepi, cum officiosa Carcavii salutatione, ut imperatum erat, distribuebam.

Promissi mei fidem quod attinet, habes eam his scriptis liberatam. Dettonvillii vero Tractatum, (de quo & sententiam meam sive Tuo sive & Carcavii nomine petis,) tum arripiebam avidus, tum eodem posteroque die evolvebam; & acuminis plenum invenio. Eumque itinere eò minus impedito aut inoffenso pede pervolabam, quia nec à nostris plane dissentientem reperi, nec multum absimili methodo incedentem: quod postquam sua cum nostris contuleris, citò deprehendes. *Dettonvillii tractatus.*

Cum autem Vir Clarissimus jamdudum de hoc negotio multa meditatus fuerit, (quod Gallos jam à viginti vel etiam quadraginta annis occupavit;) illaque ipse proposuerit problemata, (num sibi tum temporis penitus perspecta nec ne, mihi nondum con-

ſtat; at magnam ſaltem eorum partem ſibi jam perſpectam eſſe, non dubitandum, credo:) omniumque undecunque ex eo tempore de hoc negotio ſcripta, atque hac occaſione ad D. Carcavium (ut deſiderabatur) tranſmiſſa, evolvendi nactus opportunitatem, indeque quod ad rem ſuam faciat tranſumendi, vel ad ſua ſaltem ſenſa perficienda anſas non leves arripiendi: non diffiteor, accuratiora longe ab ipſo forſan expectanda; quam à me, qui ſolus & rudis huc acceſſi. Præter enim ea quæ apud Toricellium extant, quæque apud Schotenium in ſuis ad Carteſium annotationibus, (neſcio an & quæ apud Tacquetum,) non memini me, ante expoſita hæc problemata vel legiſſe de Cycloide quicquam, vel meditatum eſſe. At interim non piget, ea quæ & nobis in hoc negotio obvenerunt palam facere, nec (ſpero) iſtarum rerum peritis diſplicebit.

Verum orandus erit vir Doctiſſimus, ne plagii nos inſimulare velit, (quod de Toricellio inſinuatum video; quam juſte, neſcio, ſaltem parum candide poſtquam per tot annos fuerit demortuus:) ſi forte eadem & ſibi & nobis non raro occurrerunt, (præſertim cum ipſe mea prius inſpexerit quam ego ſua:) neque etiam ut inventis noſtris derogatum ire velit, ſi forte horum nonnulla vel ipſe vel Robervallius (quem pro conjuncta perſona habeo,) prius invenerit. Dummodo enim ipſi ſua apud ſe premunt inventa, nec publici juris faciunt, iniquum plane eſſet ni & alios patiantur ea quæ ipſi celant itidem invenire, atque interim inveniendi (ſiqua ſit) gloriam reportare. Si enim nobis, verbi gratia, (inter alia) proponatur inveſtigandum (& quidem ſub præmio) tanquam res ardua & difficultatis plena & quæ mercedem mereatur; *Quanta ſit ſolidi ex Cycloidis circa baſem converſione magnitudo*: Non nobis id obeſſe debuit aut famæ noſtræ, ſi Robervallius aliquando (ante aliquot forſan annos,) clam nobis, id etiam invenerit; neque ſi tum ego, tum & alii, id ipſum proprio marte inveniamus (nec interim alius alium incuſamus plagii,) minus propterea inveniſſe cenſendi ſumus, quam ipſe Robervallius: (eadem enim in eodem aperto naturæ campo à variis inveniri nihil prohibet.) Quam quidem inveniendi laudem ſi præripuiſſe vellent; oportuit id nobis ut jam inventum exhibuiſſe, non ut nunc inveſtigandum proponere. Quod & de reliquis utrinque inventis pariter dictum, eſto.

Et

Et quidem maluissem, vel hoc nomine, ut abstinuisset Author Historiolæ *de la Roulette*, saltem eis quæ in *Torricellium* dicta sunt; (in Torricellium, inquam; nam de *Lalouera* minus sum solicitus, ut qui superstes adhuc est in sui Apologiam;) quam ut meritissimum virum, jam per multos annos demortuum, suggillaret. Torricellium utique ex scriptis novimus tum virum doctum esse & Mathematicum, tum de Mathematicis optime meritum; credo, & ingenuum. Nec video quid apud illum admissum sit, quod Clarissimo Viro, vel Robervallio etiam, cujus partes agit, bilem moveret. Edidit Torricellius, anno 1644, inter alia, demonstrationes suas de Cycloidis area circuli genitoris tripla: quod quidem cur ipsi non liceret, non video. Demonstrationes illas, suas esse, non negant; nec causantur illum Robervallii quicquam pro suo venditasse. Non dixit quidem, (nesciebat enim, vel ipsis id fatentibus,) sed nec negavit, Robervallium hoc etiam demonstrasse. Quod jam tum vel publice notum erat, vel non; Si sic, Robervallio id injurium esse non potest, si post illum alius idem solvat problema, magis quam Archimedi quod post illum idem Torricellius demonstraverit quadraturam parabolæ; Si minus, saltem Torricellio succensendum non erit quod ipse nesciverit quid vel in scriniis suis apud se premeret Robervallius, vel etiam amicis suis communicaret. Nos saltem Torricellio plus debemus, qui demonstrationes suas jam palam factas vulgavit, quam, qui suas adhuc supprimit, Robervallio. Et quidem iniquum plane judicamus, ut, si suas nolit Robervallius typis mandare, non igitur liceat Torricellio suas. At Galilæo, inquiunt, id asscribit Torricellius quod Mersenno debetur, &, quod Robervallio, sibi. At bona verba, quæso: Siquidem ego neutrum horum video. Erat utique suarum solutionum Author Robervallius, & Torricellius suarum non minus. Sin sua interesse putaverit Robervallius ut sciat orbis priores suas esse, ut ut id nesciverit Torricellius; liberum id illi fuit, hoc indicasse, nec erat ad hoc necesse ut Torricellium, hujus nescium, suggillet, aut iniquis suspicionibus oneret. Et quidem tantum abest ut, in derogationem Robervallii, se problematis hujus solutionem invenisse *primum* affirmaverit, ut ne quidem se *invenisse* dicat: Sed solummodo propositionis veritatem professus, suis eam demonstrationibus confirmat. Quod quid ni impune possit, non video.

At fieri possit, ut inter Galilæi schediasmata, Beaugrandi scriptum viderit, quo demonstrationem Robervallii, celato nomine, ad Galilæum miserat; unde ansam suis arripuisse possit. Nempe hoc suspicantur: Num autem pro comperto habeant, ignoro; nec nisi hoc fassus fuerit ipse, quod non affirmant, unde id sibi constare possit non docent. Sed, ut ut sit; non surreptas inde demonstrationes causantur ipsum pro suis venditâsse, nec negant suas esse quas exhibet. Quodnam igitur sit, cujus insimulent criminis, plane non intelligo: nec, præter sinistras suspiciones, quicquam quo id constet afferunt. Imo vero, inquiunt, (quod palmarium est apud eos argumentum,) literas ipsius manu scriptas habent, quas ut κειμήλιον quoddam in hunc diem conservant, (quasi quidem res ipsa tanti esset,) quibus Robervallio primas concedit in hujus Problematis solutione. Nempe Vir ingenuus, cum tandem intellexerit, quod dum librum ederet nesciebat, Robervallium etiam (clam ipso) hoc idem demonstrasse, utut typis illud non vulgaverit, (quod necdum, credo, fecit,) non ægre fassus illud erat. Verum hoc sibi tum innotuisse cum librum ederet, nec illum confessum dicunt, nec affirmant ipsi; imo contrarium docent. Quid itaque culpent nescio, nisi nefas esse velint, ut quisquam vel inveniat alius, vel in publicum emittat, quod sibi forte clam cognitum, apud se premit Robervallius, vel suis solis notum malit. Mersennum vero quod spectet, cui derogatum insinuant quod Galilæo tribuitur: vel nullo quidem, vel perexiguo, mihi visum est fundamento niti. Esto enim quod volunt ipsi, Mersennum saltem anno 1615 hanc considerâsse curvam, *la Roulette* sibi dictam; atque de hac tum temporis Geometras interrogâsse: si tamen & verum sit, quod prodit Torricellius (quod quidni sit, non video, nec dicunt illi,) hanc ipsam lineam *à Galilæo jam supra 45 annum*, (adeoque anno saltem 1599, prodiit enim liber ille anno 1644,) *Cycloidem vocatam*: Ecquid, quæso, Mersenno derogatum itur, dum hoc dicitur? Nec quidem aliud de Galilæo dictum, quod huc spectet, apud illum quicquam reperio: de Mersenno, nihil. Et quamquam nolim sibi suum reponere, *ce fut un sujet de rire en France*; at nos certe, qui minus forte sumus quam Galli sui ad risum proclives, miramur saltem (dum Torricellii verba cum hac historiola comparamus,) quid illud tanti sit, quod tantis hisce questibus subsit fundamentum. (Quasi quidem

Nelius

Nelius noster Heuratium vestrum ejusdem insimularet criminis, qui id ipsum se primum proferre putat, quod jam ultra duos annos apud nostros passim innotuit, se tamen inscio, & à pluribus demonstratum.) Sed nimius forte videar in alieno negotio. Ignoscent interim Clarissimi Viri (quos ego veneror, & Mersennum suum) si parcius ista dicta malim, quibus in doctissimi Viri, & bene olim meriti, famam, nulla necessitate involatur. Optassem potius, ut, si quid apud se tanti habent, quod sibi ab aliis præreptum nollent, quò tum id sibi securius asserant, tum in usus publicos magis conducat, divulgent ipsi; ut non sit opus ea sibi tandem ex postliminio vendicandi. Saltem, si, dum hoc ipsi negligunt, id alii aliunde discant, vel tum sibi fieri injuriam non causentur, vel sibi à se factam intelligant. Sed his missis ad Dettonvilium nostrum redeo.

Quam autem sua pleraque, aliis licet verbis, in meis etiam extent, erat quidem mihi aliquando in animo, collatis locis, digito indicare, atque in eum finem jam ante accuratius perlegisse, (vix enim aliter, quam, quod aiunt, tanquam canis ad Nilum, intra biduum illud quod diximus, summa quæque delibando perlegimus;) quod cum per otium hactenus non licuerit, id tibi tamen ubi utrumque perlegeris facile patebit. Quæ tamen non eo animo dicta velim intelligas, quasi Clarissimi Viri meritis derogare velim; vel sinistræ quicquam suspicionis alere; sed saltem ut reipsa constet, quàm in rebus hujusmodi mirum non sit, varios, eosque longe dissitos, nec ab invicem edoctos, dum easdem versant res Geometricas, in easdem item speculationes incidere; adeoque non temere alius alium insimulare plagii, (in hoc præsertim, ingeniorum feraci seculo,) vel etiam aliis, quod ipse prior invenerit, vanus insultare. Nam *Invenisse*, quidem Acuminis est; at, *primum invenisse*, Fortunæ: neque enim minore vel subtilitate vel acumine posterior idem non raro invenit, quod alius (se nescio) invenerat primus.

Cur autem existimem Cl. Viro, hæc omnia sua problemata non sibi tunc perspecta esse, cum ea proposuerit; nec antequam aliorum hac de re scripta, ad D. Carcavium missa, inspexerit, quæ perpoliendis & perficiendis inventis suis adjumento esse possint: multa sunt quæ suadent. Suscepit utique vir. Cl. jam ab initio cum sua primum exposuit Problemata, non quidem se illa posse

posse omnia absolvere; sed saltem, nisi quis alius interea solverit, *se, ea quæ invenerit ipse, non aliis visurum, unde majora jam inventis nanciscantur*: Quæ quam caute dicta sunt, vides. Fallor etiam, vel ipsius solutiones (quantum ex levi inspectione colligo) dependent ex cognitione longitudinis Cycloidalis lineæ, ejusque in data ratione divisione, (neque enim, citra hæc, illius figura 13ª ad præsentes casus omnes accommodabitur;) quarum cum inventionem Wrennio nostro attribuat, non ante inspectas Wrennii literas cognovisse censendus erit. Et quamvis hoc inventum Wrennii extenuatum ire satagat, Gallosque suos innuat istius, cum innotuit, demonstrationem suppeditare posse: non tamen affirmare sustinet, vel id sibi prius innotuisse, vel Gallorum suorum quempiam, ne privatim quidem, cuiquam innuisse perspectam sibi esse istius lineæ vel longitudinem vel in data ratione divisionem. (At interim candorē forte desideremus, cum video exterorū inventa, quæ apud D. Carcavium clam reponenda videbantur, cū Gallis suis etiam ante indictum diem statim communicata; quo, si non aliàs, saltem ex his inspectis valeant quæsita solvere.) Addo insuper, Posteriora quæsita, quæ tandem ipsa proponit Historiola, quæ ex istius curvæ in data ratione divisione dependent, indicio sunt illius longitudinem, & partium suarum, ignoratam prius esse. Neque alia apparet ratio, cur non eadem unà cum prioribus proponerentur. Sin mea me hac in re fefellit conjectura, eaque sibi omnia pridem perspecta dixerit, Pascalius dicam? an Dettonvillius; non contendo: nec invidebo sibi, sed gratulor inventa sua.

De singulis autem sententiam sigillatim ferre, ob causam jam memoratam, nondum valeo. Non video tamen quin, quæ aliquatenus perpendi, sana sint, & rite demonstrata. Atque ea speciatim (de quibus interrogas) de lineæ Parabolicæ & Spiralis æqualitate. Quamvis enim istius demonstrationem nondum perlegerim; cum tamen propositio illa vera sit; eamque sic esse, ut aliàs, sic ex demonstratione per inscriptiones & circumscriptiones figurarum, ipse antehac perspexerim: non pronus sum ut suspicer Cl. Virum demonstrando lapsum esse. Quod eo liberius pronuncio, quia Robervallium antehac conquestum intelligo, me *propositionem illam falsam esse temere affirmasse*: quam quidem ego neque temere nec omnino repudiaveram, sed demonstrationem

tantum-

tantummodo ut ab Hobbio prolatam, ut insufficientem improbabam: Propositionem ipsam, ubi illam examinaveram, veram deprehendi.

Calculum, quem ille totum omittit, fundamenta tradidisse contentus, nos integrum exhibuimus, usque ad casum illum quem ipse ex omnibus selegerat, nempe de centro gravitatis semisolidi semiconversione semicycloidis circa basin descripti, (& quidem solidi integri ejusdem conversione circa axem facti.) Putaveram etiam ad reliquos item casus (prius quam rem operæ absolverint) calculum perduxisse; eum saltem qui ex § 65, 66, collatis supplendus est. Sed cum interea temporis prodierit Dettonvilii tractatus, nihil deinceps addendum censui; ne ipsius vitulâ arasse videar: Adeoque prout Mense Martio conscriptus erat, atque ad Honoratiss. Vicecom. *Brounker* statim transmissus, eodem plane statu in publicū jam emissum tractatum habes. Potuissem quidem prolixius multo, & magis ad pompam, hoc totum opus perduxisse, quod & tyronibus forsan & rebus hisce minus exercitatis fuisset gratius, si per Definitionum, Lemmatum, Problematum, Theorematum, Scholiorum solennitates incedere, & longo apparatu lineares ubique demonstrationes adornare vellem: Sed tibi, credo, non minus placebit concinna brevitas, & in paucis multa; qui, vel digito ad fontes intento monitus, demonstrationis vim succincte traditam non minus assequêris, quam si tantâ esset solennitate in longum protracta. Sicubi vero in multiplici calculo (quod omnino est possibile) numerum pro numero positum deprehendes, id indicare non gravaberis & condonare. Atque hæc sunt quæ tum de Illius tum de Nostro tractatu monuisse visum erat.

Sed, priusquam Cycloidem penitus dimittam; non ingratum tibi fore credo si magnam illius cum Cissöide convenientiam ostendam.

Proposuisti non ita pridem, de Cissoide propositionem perelegantem; Nempe in exposita linea Cissöide, C Z Z, cujus hæc natura est, ut rectam Z z ad C tendentem, cissoide & semicirculi C z z peripheria interceptam, bifariam secet G H recta diametro F C perpendiculariter insistens in centro G: *Spatium* F C Z A F *longitudine infinitum*, C Z Z *cissoidi &* F A *circulum tangenti interjectum, semicirculi* F z C, *triplum esse*, asseris. Petis autem, Num, ut *Hyperbolas Infinitas* (de quibus cum D. *De Cissoide.*

Fermatio paulo ante differueram) sic & spatium hoc *Ciſſoidale* ex noſtra *Infinitorum Arithmetica* ſuppeditare poſſem.

Id itaque ſtatim quî fieri poſſit, ſequenti demonſtratione indicabam; quam non pigebit hic repetere.

Si ducantur tum z G K diameter, tum rectæ K C, & K Z
Fig. 22. (diametro C F in L occurrens:) oſtendit Pappus l. 3. p. 5. propter tum Z z biſectam in H, tum z K in G, rectam K Z rectæ G H parallelam eſſe: Adeoque tum z C K angulum in ſemicirculo, tum angulos ad L, rectos eſſe: Et conſequenter rectas L F, L K, L C, L Z, continue proportionales. Quod quidem non minus valet de puncto Z quovis in Ciſſoidis continuatione extra ſemicirculum, quam (qui Pappi caſus eſt) ubi intra ſemicirculum contingit.

Ponamus jam rectam F C diametrum in æquales partes numero infinitas infinitis punctis L dividi. Erunt itaque omnes C L, ut 1, 2, 3, &c. arithmetice proportionales, quæ ſucceſſive dicantur, a; quarum maxima C F dicatur D. Eritque L K, (quippe media proportionalis inter C L & L F, hoc eſt, inter a & $D - a$,) $\sqrt{:aD - a^2}$. Cumque ſit ut L K ad L C, ſic L C ad L Z; erit L Z $= \frac{a^2}{\sqrt{:aD - a^2}}$; hoc eſt $\frac{a^2}{\sqrt{a} \times \sqrt{:D - a}}$ ſive $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{:D - a}}$, ſive $\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{:D - a}}$ vel $\sqrt{\frac{a^3}{D - a}}$. Hoc eſt, omnia quadrata L Z, ſunt ſeries Tertianorum, per ſeriem Primanorum inverſe poſitorum, reſpective diviſa: ipſæque L Z rectæ, in horum quadratorum ratione ſubduplicata.

Quod autem omnes $\sqrt{\frac{a^3}{D - a}}$ hoc eſt, omnes L Z ſpatium F C Z A F complentes, ad omnes $\sqrt{:aD - a^2}$: vel $\sqrt{a} \times \sqrt{:D - a}$: hoc eſt, ad omnes L K complentes ſemicirculum, ſint in ratione tripla; ex principiis *Arithmeticæ Infinitorum* ſic colligimus.

Si ſeries ſubſecundanorum ſive $\sqrt{a}$, in ſeriem primanorum a inverſam (hoc eſt, in $D - a$) reſpective ducatur, fiet ſeries $D\sqrt{a} - a\sqrt{a}$ ſive $D\sqrt{a} - \sqrt{a^3}$; quæ eſt ad ſeriem Æqualiũ ſive totidem $D\sqrt{D}$ vel $\sqrt{D^3}$, ut $\frac{2}{3} - \frac{2}{5}$ ad 1, ſive ut 4 ad 15. (per

prop.

prop. 64 & 73 *Arithm. Infin.*) Eodem modo ſi reſpective ducatur eadem ſeries $\sqrt{a}$, in ſeriem a^2 inverſam, hoc eſt in ſeriem Q: $D - a$: vel $D^2 - 2aD + a^2$, fiet ſeries $D^2\sqrt{a} - 2Da\sqrt{a} + a^2\sqrt{a}$, vel $D^2\sqrt{a} - 2D\sqrt{a^3} + \sqrt{a^5}$, quæ eſt ad ſeriem Æqualium, ſive totidem $D^2\sqrt{D}$ vel $\sqrt{D^5}$, ut $\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{2}{7}$ ad 1, ſive ut 16 ad 105. Et ſimiliter, ſi eadem ſeries $\sqrt{a}$ reſpective ducatur in alias ſeries inverſas, prodibunt hæ rationes ſubjectæ. Nempe ſi ſeries $\sqrt{a}$ ducatur inverſe in

ſeries $1.\quad a.\quad a^2.\quad a^3.\quad a^4.$ &c. prodibunt

rationes $\frac{2}{3}.\quad \frac{4}{15}.\quad \frac{16}{105}.\quad \frac{96}{945}.\quad \frac{768}{10395}.$ &c.

hoc eſt $\frac{2}{3}.\quad \frac{2\times2}{3\times5}.\quad \frac{2\times2\times4}{3\times5\times7}.\quad \frac{2\times2\times4\times6}{3\times5\times7\times9}.\quad \frac{2\times2\times4\times6\times8}{3\times5\times7\times9\times11}.$ &c.

Si vero hi loci pro paribus habeantur, & ſuppleantur interjecti loci impares; ponendo, in loco tertio, (inter 1 & a,) pro ſerie $\sqrt{a}$ in $\sqrt{a}$ inverſe ductâ, rationem 1 ad 2 □ (per prop. 167. *Arith. Infin.*) Sicut ratio loci quarti multiplicat rationem ſecundi per $\frac{2}{5}$, & hanc ratio ſexti per $\frac{4}{7}$, *&c.* manifeſtum eſt (ex conſecutione ſeriei) rationem quinti multiplicare rationem tertii per $\frac{3}{6}$; & ſimiliter in reliquis. Nempe ſeries $\sqrt{a}$ ducta inverſe in

ſeries $\frac{1}{\sqrt{a}}.\quad 1.\quad \sqrt{a}.\quad a.\quad \sqrt{a^3}.\quad a^2.\quad \sqrt{a^5}.$ &c. dabit

rationes $\frac{1}{4}$) $\frac{1}{2\,\square}.\ \frac{2}{3}.\ \frac{1}{2\,\square}.\ \frac{2\times2}{3\times5}.\ \frac{1}{2\,\square}\times\frac{3}{6}.\ \frac{2\times2\times4}{3\times5\times7}.\ \frac{1}{2\,\square}\times\frac{3}{6}\times\frac{5}{8}.$ &c.

Unde, in præſens negotium hoc ſaltem ſeligendum eſt, ſeries $\sqrt{a}$ & $\sqrt{a^2}$ invicem inverſe ductas, ad ſeriem æqualium, ſive ad $D^2 = \sqrt{D^4}$ toties ſumptum, ut $\frac{1}{2\,\square}\times\frac{3}{6}$ ad 1; ſive ut 1 ad 4□.

Deinde, ut ſeriem $\sqrt{a}$ jam perpendimus, perpendamus ſimiliter ſeriem $\sqrt{a^3}$. Ea nempe ducta in ſeriem a inverſam, hoc eſt, in $D - a$ dat ſeriem $D\sqrt{a^3} - a\sqrt{a^3}$, vel $D\sqrt{a^3} - \sqrt{a^5}$ cui convenit ratio $\frac{2}{5} - \frac{2}{7}$ ad 1, ſive 4 ad 35. Et ſimiliter in reliquis.

Nempe series $\sqrt{a^2}$ inverse ducta in

series $1.\ a.\ a^2.\ a^3.\ a^4.$ &c. dabit

rationes $\frac{2}{5}.\ \frac{4}{35}.\ \frac{16}{315}.\ \frac{96}{3465}.\ \frac{768}{45045}.$ &c.

hoc est $\frac{2}{5}.\ \frac{2\times2}{5\times7}.\ \frac{2\times2\times4}{5\times7\times9}.\ \frac{2\times2\times4\times6}{5\times7\times9\times11}.\ \frac{2\times2\times4\times6\times8}{5\times7\times9\times11\times13}.$ &c.

Si vero hi loci pro paribus habeantur, & suppleantur loci impares, ponendo (per inquisitionem modo factam) loco tertio (inter 1 & a) rationem $\frac{1}{4\square}$: Ut ratio loci quarti multiplicat rationem secundi per $\frac{2}{7}$; & illam ratio sexti per $\frac{4}{9}$; sic rationem loci tertii multiplicabit ratio loci quinti per $\frac{3}{8}$; ratio tertii rationem primi per $\frac{1}{6}$; & de reliquis similiter. Nempe series $\sqrt{a^2}$ inverse ducta in

series $\frac{1}{\sqrt{a}}.\ 1.\ \sqrt{a}.\ a.\ \sqrt{a^3}.\ a^2.\ \sqrt{a^5}.$ &c. dat rationes $\frac{1}{6}\big)\frac{1}{4\square}.\ \frac{2}{5}.\ \frac{1}{4\square}.\ \frac{2\times2}{5\times7}.\ \frac{1}{4\square}\times\frac{3}{8}.\ \frac{2\times2\times4}{5\times7\times9}.\ \frac{1}{4\square}\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{10}.$ &c.

Cum igitur series $\sqrt{a^2}$ in seriem $\frac{1}{\sqrt{a}}$ inverse ducta; hoc est series $\sqrt{a^2}$ per seriem $\sqrt{a}$ inverse divisa, hoc est divisa per $\sqrt{:D - a}$, sit ad seriem æqualium, sive D toties sumptum, ut $\frac{1}{6}\big)\frac{1}{4\square}$ ad 1, hoc est, ut 6 ad $4\square$, vel 3 ad $2\square$; Erunt omnes $\sqrt{\frac{a^3}{D - a}}$, hoc est omnes L Z, hoc est F C Z A F spatium, ad D toties sumptum, hoc est ad D^2, ut 3 ad $2\square$. Sed (per prop. 167 Arith. Infin.) omnes $\sqrt{:aD - a^2}$: hoc est L K, hoc est C z F semicirculus, est ad D^2, ut 1 ad $2\square$. Ergo Spatium illud est Triplum Semicirculi. Quod erat ostendendum.

Sed & ex abundanti ostendebam, Dicti spatii lineam centri gravitatis rectæ F A parallelam ab eadem distare sextâ parte diametri: Item, solidum factum ex conversione dicti spatii circa FA ut axem, æqualem esse solido ex conversione F z C semicirculi

circa

circa eandem FA tangentem, hoc eſt, ſemicylindro cujus baſis ſit idem ſemicirculus, & altitudo æqualis totius circuli peripheriæ: Item, ſolidum ex ejuſdem converſione circa rctam C α ſolidi prioris quintuplum: Solidum vero ejuſdem converſione circa CF, magnitudine infinitum: Centrum denique gravitatis nuſquam eſſe. Nempe hoc modo.

Poſitâ linea æquilibrii C α, erunt momenta rectarum L Z, ſeries compoſita ex ſerie magnitudinum L Z, hoc eſt $\sqrt{\frac{a^3}{D-a}}$ & diſtantiarum C L hoc eſt a; adeoque ſeries momentorum $a\sqrt{\frac{a^3}{D-a}}$, vel $\sqrt{\frac{a^5}{D-a}}$. Cujus ratio ad ſeriem æqualium, hoc eſt ad momentum quadrati diametri ex puncto F ſuſpenſi, ſic colligitur. Series $\sqrt{a^5}$ inverſe ducta in

ſeries $1.\ a.\ a^2.\ a^3.\ a^4.$ &c. dabit

rationes $\frac{2}{7}.\ \frac{2\times2}{7\times9}.\ \frac{2\times2\times4}{7\times9\times11}.\ \frac{2\times2\times4\times6}{7\times9\times11\times13}.\ \frac{2\times2\times4\times6\times8}{7\times9\times11\times13\times15}.$ &c.

Adeoque cum ſeries $\sqrt{a}$ in ſeriem $\sqrt{a^5}$ inverſe ducta, rationem exhibeat (ſupra inventam) $\frac{1}{2\square}\times\frac{3}{6}\times\frac{5}{8}$ ad 1. hoc eſt 5 ad $32\square$; ſupplebimus interjecta loca vi analogiæ, ad hanc formam. Nempe ſeries $\sqrt{a^5}$ inverſe ducta in

ſeries $\frac{1}{\sqrt{a}}.\ 1.\ \sqrt{a}.\ a.\ \sqrt{a^3}.\ a^2.\ \sqrt{a^5}.$ &c. dabit rationes $\frac{1}{8}\big)\frac{5}{32\square}.\ \frac{2}{7}.\ \frac{5}{32\square}.\ \frac{2\times2}{7\times9}.\ \frac{5}{32\square}\times\frac{3}{10}.\ \frac{2\times2\times4}{7\times9\times11}.\ \frac{5}{32\square}\times\frac{3}{10}\times\frac{5}{12}.$ &c.

Momenta itaque omnium L Z, (hoc eſt ſpatii F C Z A F) in ſuo ſitu, ad momentum totidem C F, ſive D, hoc eſt D^2, in diſtantia maxima, hoc eſt ex puncto F ſuſpenſi, ut $\frac{1}{8}\big)\frac{5}{32\square}$ ad 1; ſive ut 5 ad $4\square$: Adeoque (propter magnitudinem ſemicirculi ad diametri quadratum, ut 1 ad $2\square$) ad momentum ſemicirculi ibidem ſuſpenſi, ut 5 ad 2; vel ſuſpenſi ex G centro, hoc eſt, in

suo situ, ut 5 ad 1. Spatium igitur FCZAF in suo situ, æquiponderat quintuplo semicirculi in situ suo, sive in distantia C G suspenso; adeoque semicirculo in distantiæ C G quintuplâ. Et
Fig. 22. consequenter (propter distantias magnitudinibus reciproce proportionales) cum spatium sit semicirculi triplum, erit distantia distantiæ subtripla, hoc est $\frac{5}{3}$ C G, vel $\frac{5}{6}$ C F, nempe a recta C α: Adeoque $\frac{1}{3}$ C G vel $\frac{1}{6}$ C F a rectâ F A. Tantundem itaque distat istius spatii linea centri gravitatis (&, siquod est, ipsum gravitatis centrum) à rectis illis C α, F A. Quod erat ostendendum.

Idem eodem modo colligitur, sumptâ ab initio, æquilibrii lineâ F A. Nempe cum series magnitudinum L Z sit $\sqrt{\frac{a^3}{D-a}}$ & distantiarum $D-a$; Est ex utrisque composita series momentorum $\sqrt{\frac{a^3}{D-a}}$ in $D-a$: hoc est $\sqrt{a^3}$ in $\sqrt{:D-a:}$ hoc est series $\sqrt{a^3}$ in seriem $\sqrt{a}$ inverse ducta; cui convenit (ut supra) ratio 1 ad 4 □. Momentum itaque dicti spatii in suo situ (respectu F A rectæ) est ad momentum quadrati F C in distantia F C suspensi, ut 1 ad 4 □; adeoque ad momentum semicirculi sic suspensi, ut 1 ad 2: Hoc est, æquiponderat semicirculo suspenso in distantia $\frac{1}{2}$ F C, hoc est ex puncto G centro, hoc est in suo situ. Cum igitur spatium illud Cissoidale in suo situ æquiponderat Semicirculo in suo, (respectu rectæ F A;) sitque spatium illud Semicirculi triplum: Erit distantia distantiæ subtripla; hoc est $\frac{1}{3}$ F G, vel $\frac{1}{6}$ F C, nempe a recta FA; Adeoque $\frac{5}{3}$ F G, vel $\frac{5}{6}$ FC, a recta C α. ut prius.

Atque hinc statim colligimus; Solidum ex conversione dicti spatii Cissoidalis, ad solidũ ex conversione semicirculi, circa eandem rectam C α, esse ut 5 ad 1, (nempe ut planorum momenta respectu ejusdem Cα rectæ:) Circa rectam autem FA (propter æqualia planorũ momenta respectu hujus rectæ) æqualia esse solida.

Si quis autem quærat, de solidorum hujusmodi semiconversione factorum, centri gravitatis linea, sive ejusdem ab F A vel C α distantia: Id eodem plane modo investigabitur. Quippe cum semicylindricæ superficies rectarum LZ semiconversione factarum, sint rectarum illarum momentis proportionales, hoc est (respectu rectæ Cα) ut $\sqrt{\frac{a^3}{D-a}}$; suorumque centrorum ab eadem recta,

in

in ratione radiorum C L, hoc eſt a: erunt omnia momenta ſuperficierum illarum ſemicylindricarum, ſeries $a\sqrt{\frac{a^5}{D-a}}$, vel $\sqrt{\frac{a^7}{D-a}}$. Cujus ſeriei ratio ad ſeriem æqualium, ſic colligitur: Series $\sqrt{a^7}$ inverſe ducta in

ſeries $1.\ a.\ a^2.\ a^3.\ a^4.$ &c. dabit

rationes $\frac{2}{9}.\ \frac{2\times2}{9\times11}.\ \frac{2\times2\times4}{9\times11\times13}.\ \frac{2\times2\times4\times6}{9\times11\times13\times15}.\ \frac{2\times2\times4\times6\times8}{9\times11\times13\times15\times17}.$ &c.

Adeoque cum ſeries $\sqrt{a}$ in ſeriem $\sqrt{a^7}$ inverſe ducta (ut ex inquiſitione primum factâ colligitur) ſit ut $\frac{1}{2\square}\times\frac{3}{6}\times\frac{5}{8}\times\frac{7}{10}$ ad 1. hoc eſt ut 7 ad $64\square$; ſupplebimus interjecta loca ad hanc formam. Nempe ſeries $\sqrt{a^7}$ inverſe ducta in

ſeries $\frac{1}{\sqrt{a}}.\ 1.\ \sqrt{a}.\ a.\ \sqrt{a^3}.\ a^2.\ \sqrt{a^5}.$ &c. dabit rationes $\frac{1}{10}\Big)\frac{7}{64\square}.\ \frac{2}{9}.\ \frac{7}{64\square}.\ \frac{2\times2}{9\times11}.\ \frac{7}{64\square}\times\frac{3}{12}.\ \frac{2\times2\times4}{9\times11\times13}.\ \frac{7}{64\square}\times\frac{3}{12}\times\frac{5}{14}.$ &c.

Momentum igitur ſuperficierum omnium ex rectarum L Z circa C α ſemiconverſione factarum, in ſuo ſitu; hoc eſt, ſolidi ex ſemiconverſione ſpatii Ciſſoidalis circa C α momentum in ſuo ſitu, reſpectu C α rectæ; eſt, ad totidem Æqualia, nempe momenta totidem ſuperficierum, rectis C F æqualibus in diſtantiis C F ſemiconverſis factarum, in diſtantia maxima ſuſpenſarum, ut $\frac{1}{10}\Big)\frac{7}{64\square}$ ad 1, ſive ut 35 ad $32\square$. Eſt autem magnitudo ad magnitudinem, ut 5 ad $4\square$, (momentis utique planorum proportionales:) Ergo diſtantia ad diſtantia ut 7 ad 8: Nempe $\frac{7}{8}$ iſtius diſtantiæ quam habet centrum gravitatis ſemicirculi radio C F deſcripti ab ipſo C: quæ quidem non eſt tota CF recta, ſed (propter curvaturam ſemicircularem) illa ejus pars quæ eſt ad totam ut Diameter ad Semiperipheriam.

Similiter, facta converſione circa F A, ſemicylindricæ ſuperficies rectis L Z deſcriptæ ſunt ut $\sqrt{a^3}$ in $\sqrt{:D-a}$: (quippe momentis rectarum proportionales;) diſtantiæ vero centrorum ſuperficierum illarum ſunt ut radii converſionis, ſive diſtantiæ $D-a$; Ergo ſuperficierum illarum momenta ſunt ut $\sqrt{a^3}$, in $D-a$, in $\sqrt{:D-a}$, ſive ut $D\sqrt{a^3}-\sqrt{a^5}$ in $\sqrt{:D-a}$.

Eſt

Eſt autem (per ſupra demonſtrata) ſeries $D\sqrt{a^3}$ in $\sqrt{:D-a}$: ſive ſeries $D\sqrt{a^2}$ in ſeriem $\sqrt{a}$ inverſe, ad ſeriem æqualium ut 1 ad 4 □: Et $\sqrt{a^3}$ in $\sqrt{a}$ inverſe, ut 5 ad 32 □: Ergo $D\sqrt{a^2} - \sqrt{a^3}$ in $\sqrt{a}$ inverſe; ut $\frac{1}{4\,\square} - \frac{5}{32\,\square}$ ad 1; hoc eſt, ut 3 ad 32 □. At ſeries magnitudinum ad æquaſium ſeriem, inventa eſt ut 1 ad 4 □. Ergo, propter $\frac{1}{4\,\square}) \frac{3}{32\,\square} (\frac{3}{8}$, diſtantia, ad diſtantiam, ut 3 ad 8. Diſtantia itaque lineæ centri gravitatis hujus ſemiſolidi circa F A, ab ipſa F A, $\frac{3}{8}$ iſtius rectæ quæ eſt ad F C ut diameter ad ſemiperipheriam circuli.

Denique, Si ſpatium illud Ciſſoidale F C Z A F converti intelligamus circa rectam C F: Circuli radiorum L Z, (quippe in radiorum ratione duplicata) erunt ſeries $\frac{a^3}{D-a}$; quæ ad ſeriem æqualium, nempe totidem circulos radiorum D vel C F, rationem habent infinitam; adeoque eſt infinitæ magnitudinis. Quod ſic colligitur. Series a^3 inverſe ducta in

ſeries, $1.\quad a.\quad a^2.\quad a^3.\quad a^4.$ &c. dabit

rationes, $\frac{1}{4}.\quad \frac{1\times1}{4\times5}.\quad \frac{1\times1\times2}{4\times5\times6}.\quad \frac{1\times1\times2\times3}{4\times5\times6\times7}.\quad \frac{1\times1\times2\times3\times4}{4\times5\times6\times7\times8}.$ &c.

Cum igitur rationes continuentur (ut patet) multiplicando proxime præcedentes per $\frac{1}{5}, \frac{2}{6}, \frac{3}{7}$, &c. harum prima multiplicare debet præcedentem per $\frac{0}{4}$, quę igitur eſſet $\frac{0}{4}) \frac{1}{4} (\frac{4}{0}$. Adeoque ſeries eadem a^3 inverſe ducta in ſeriem $\frac{1}{a}$, (hoc eſt, ſeries $\frac{a^3}{D-a}$) rationem haberet ad ſeriem æqualium 4 ad 0: quæ eſt infinita. Ipſumque ſolidum propterea eſſet magnitudinis infinitæ. Quod item oſtendendum erat.

Sed & propterea, momentum plani Ciſſoidalis F C Z A F reſpectu F C rectæ, eſſet ad momentum quadrati F C, vel D^2, ut 4 ad 0, (propter planorum momenta ſolidis converſione factis proportionalia,) hoc eſt infinitum. Et conſequenter, cum ſpatium ſit magnitudinis finitæ, diſtantia centri gravitatis eſſet infinita:

infinita: quod igitur nusquam est. Quod ultimo suscepimus ostendendum.

Sin de solidorum hujusmodi semiconversione circa F C centro gravitatis inquiratur. Cum semicirculorum radiis L Z descriptorum momenta respectu ejusdem F C rectæ, sint in radiorum ratione triplicata: erunt igitur ut Series $\frac{a^2}{D-a}\sqrt{\frac{a^2}{D-a}}$, sive ut series $\sqrt{\frac{a^{22}}{D^3 - 3aD^2 + 3a^2D - a^3}}$: hoc est ut series $\sqrt{a^{27}}$ in seriem $\frac{1}{\sqrt{a}}$ inverse ducta. Series autem $\sqrt{a^{22}}$ inverse ducta in

series $1.\quad a.\quad a^2.\quad a^3.\quad a^4.$ &c. dabit

rationes $\frac{2}{29} . \frac{2\times 2}{29\times 31} : \frac{2\times 2\times 4}{29\times 31\times 33} : \frac{2\times 2\times 4\times 6}{29\times 31\times 33\times 35} . \frac{2\times 2\times 4\times 6\times 8}{29\times 31\times 33\times 35\times 37}$. &c.

Cum igitur, (ut ex prima inquisitione continuatâ patebit,) series $\sqrt{a^{27}}$ & $\sqrt{a}$ inverse multiplicatæ rationem exhibeant $\frac{1}{2\square}\times\frac{3}{6}\times\frac{5}{8}\times\frac{7}{10}\times\frac{9}{12}\times\frac{11}{14}\times\frac{13}{16}\times\frac{15}{18}\times\frac{17}{20}\times\frac{19}{22}\times\frac{21}{24}\times\frac{23}{26}$ $\times\frac{25}{28}\times\frac{27}{30}$, quæ (supplendo loca intermedia) interponenda erit inter 1 & a; eadem ratio per $\frac{1}{30}$ divisa convenit seriei $\sqrt{a^{27}}$ in $\frac{1}{\sqrt{a}}$ inverse ductæ, atque hæc iterum per $\frac{-1}{28}$ divisa conveniret seriei momentorum expositæ, nempe seriei $\sqrt{a^{27}}$ in $\frac{1}{\sqrt{a^2}}$ inverse ductæ, sive per $\sqrt{a^2}$ inverse divisa. Ex qua denique ratione si eximatur item ratio magnitudinum $\frac{4}{0}$ modo reperta, prodibit $\frac{4}{0}\times\frac{-1}{28}\times\frac{1}{30})\frac{1}{2\square}\times\frac{3}{6}\times\frac{5}{8}\times$&c. *usque ad* $\times\frac{27}{30}$ *ut supra*;

 vel

vel $\frac{0}{4} \times \frac{28}{-1} \times \frac{30}{1} \times \frac{1}{4\square}$ &c. quæ etiam adhuc (propter -1 quantitatem negativam) erit ratio infinita; (nempe ut 0 ad numerum negativum; quæ non minus est ratio infinita quam ut numerus positivus ad 0:) Adeoque centrum gravitatis nusquam.

Vides itaque quomodo ex *Infinitorum Arithmetica*. Expositam propositionem (cum lucro) absolvimus. Atque hæc fere sunt quæ directâ methodo hac de re jam (anno superiori 1658) ad te scripseram.

Hæc autem hîc repetendi ansam dedit, quod secutis literis & ipse mones; Nempe non modo totum illud spatium F C Z A F, potius F C z semicirculi triplum esse; sed & particulatim segmentum F C Z F (cissoidali C Z & rectis F C Z F comprehensum) respectivi segmenti circularis F z F, ubique triplum esse. Nos autem jam supra demonstravimus § 22, similis segmenti circularis F z F fig. 1 vel 8, triplum esse segmentum Cycloidale ζ Z A. Id ipsum itaque præstat in spatio Cissoidali FZ, atque in Cycloidali ζ Z; utraque siquidem segmentum abscindit segmenti circularis F z correspondentis triplum. Mirum igitur vides, sed qui non displicebit, figurarum tam dissimilium consensum. Atque de Cissoide quidem hactenus. Tempus est ut ad ea redeam quæ novissima tua suggerit Epistola.

Curvarum Εὔθυνσις.

Heuratii vestri, quod memoras, nuperum inventum, (sub initium præsentis anni, vel præcedentis finem, quod ex tuis literis conjicio, excogitatum,) quo curvam rectæ æqualem invenit; confirmat id quod superius insinuavimus; Nempe, plurium non rarò, in iisdem rebus inveniendis συμφώνησιν: Et simul, ut de curvarum Εὐθύνσει dicam? an Εὐθυσμῷ, pauca differam, ansam subministrat.

Tradideram ego jampridem, in Scholio prop. 38. *Arith. Infinitorum*, methodum curvas cum rectis comparandi; Nempe, *continuas subtensas inscribendo quarum quadrata, quadratis differentiarū ordinatim-applicatarū, quadratis invicem æqualibus auctis, æquentur*: Et speciatim in Parabola (propter ordinatim-applicatas in parabolæ complemento, ut numeros quadraticos, adeoque illarum differentias ut 1, 3, 5, 7, *&c.* arithmetice proportionales,) subtensas illas esse ut $\sqrt{:A^2+1}$. $\sqrt{:A^2+9}$. $\sqrt{:A^2+25}$. *&c.* hoc

Fig. 26.

hoc eſt, ut *quadratorum æqualium, quadratis arithmetice-proportionalium auctorum*, *radices quadraticas*: (Quas eſſe ut ordinatim-applicatas ad conjugatum axem hyperbolæ, prius demonſtraveram prop. 35, & 41, *Con.Sect.*) In Paraboloidibus autem Cubicalibus, Biquadraticalibus, *&c.* ut *radices quadraticas quadratorum æqualium auctorum quadratis differentiarum Cuborum*, *Biquadratorum*, *&c.* Quarum quidem ſubtenſarum omnium aggregatum cum perpetuò minus ſit ipsâ curvâ, ſed ad eam ita propius ſemper accedat ut differentiâ, datâ quavis minore, tandem deficiat: Et Tangentium pariter ope haberi ſimili modo poſſit rectarum ſumma quæ differentiâ, datâ quavis minore, eandem curvam excedat: Poſſe hinc terminos veris quantumvis proximos inveniri intra quos curvæ longitudo vera caderet: (Adeoque in infinitum procedendo, ipſam curvam exhibitum iri:) docuimus.

Et quidem, quum ſcholium illud ibidem inſerebam, currente prelo, (unde in Propoſitionum cenſum non erat redactum,) animum habebam ſpeculationem illam, cum per otium liceret, reſumendi & perficiendi. (Animadvertebam enim jam tum, rectas ad curvas eſſe, ut Figuras congruas ad figurarum quaſi Truncos: ſed, ut quas figuras ad quos truncos, prout cujuſque curvæ natura poſtulet; ut &, quænam ex figuris illis cum truncis reſpondentibus notam rationem ſubeant; conſiderandum adhuc reſtabat.) Sed (ut clavus, quod aiunt, clavum pellit,) aliis ſe ſubinde interponentibus ſpeculationibus, priorem illam reſumere negligebam, donec prævertens Nelius noſter me excitavit.

Selegit autem D. *Gulielmus Nelius*, Equitis *Pauli* filius, (num ex noſtris anſam nactus, neſcio,) Curvam eam quæ ordinatim-applicatarum differentias habeat ordinatim-applicatis in parabola proportionales; quarum itaque quadrata quadratis æqualibus aucta, erunt item arithmetice-proportionalia, eorumque radices ut ordinatim-applicatæ in parabolæ trunco; & propterea, ut parabolæ truncus ad parabolam, ſic curva illa ad rectam. Nelium ſecutus *Wrennius* item, & poſt illum Illuſt. *Brounkerus* id ipſum demonſtrarunt, & tandem ego; neſcio an & alii. Quo primum tempore invenit Nelius, non certus ſcio: vulgavit autem ſub Julii vel ſaltem Auguſti menſem Anni 1657, primus (credo) omnium qui ulli curvæ æqualem rectam aſſignavit.

Vertente Anno, menſe Julio 1658, Curvam Cycloidis, axis

ſui quadruplam, demonſtravit Cl. V. Chr. *Wren*; Quod poſt illum ab aliis item demonſtratum eſt. Et tandem, quod prius Nelius noſter, *Heuratius* item veſter (neſcius, puto, id noſtris paſſim prius innotuiſſe) invenit denuo, quod *Schotenius* veſter ſcriptis ſuis hoc anno editis inſeruit.

Curva Paraboloidis Semicubicalis. Fig. 23.

Nelii demonſtratio, quam (ut dictum eſt) ante duos annos vulgavit, hæc erat.

Sit A b C D *parabola recta; cujus axis* A D *dividatur in æquales partes minimas* e e; *atque ad puncta* e *ordinatim applicentur* e f *rectæ, parabolis* A e b *proportionales. Et fiat* D S I *rectangulum, ad parabolam* A D C, *ut* A D *ad* D C. *Denique ſit* e h *ubique æqualis potentiâ utriſque* e s, e b.

Dico primo, eandem eſſe inter ſe proportionem figuræ A D H I, *rectanguli* D I, *& parabolæ* A D C, *quæ eſt linearum* A f C *curvæ, & rectarum* A D, D C.

2°. *Rectas* e h *eſſe ordinatim applicatas in Parabola.*

Sunt enim rectæ e f, *per conſtructionem, parabolis* A e b *proportionales; & propterea rectarum differentiæ, commode repræſentantur per rectangula* e e b. *Rectangula* e e s *ſunt æqualia: (eorumque omnium ſumma, ad ſummam omnium* e e b, *ut* A D *ad* D C;) *repræſentant itaque rectas* e e. *Rectæ* f f *ſunt æquales potentia tum rectis* e e *tum rectarum* e f *differentiis. Et rectangula* e e h *ſunt ubique in eadem proportione ad quantitatum illarum repræſentativas. Conſtat itaque propoſitionis pars prior.*

Quadrata rectarum e b *ſunt arithmetice proportionalia. Quadrata rectarum* e e *ſunt æqualia. Ergo & quadrata* e h *ſunt Arithmetice proportionalia; ipſæque* E H *rectæ quadratorum arithmetice proportionalium latera: adeoque ſunt ut ſeries ordinatim-applicatarum in parabola.*

Et conſequenter; Exhiberi poterit linea recta æqualis curvæ A F C.

Hanc D. Nelii demonſtrationem ubi conſpexerat Illuſtriſſ. Bronkerus; ſuam ille ſtatim, quæ ſequitur, non abſimilē concinnavit, & impertivit mihi, quam jam ultra duos annos apud me habui. Et parum abfuit quin eam *Commercio Epiſtolico* à me non ita pridem edito inſeruerim; (eodem ſiquidem tempore accepi primò, quo inter nos & D D. Fermatium, Frenicliumque, alternabantur illæ literæ.) Sed, cum ipſius Nelii (qui primus invenit) demonſtra-

demonstrationem nondum videram; non commodum videbatur, ipsius intermissâ, aliorum demonstrationes edere; sed vel sibi permittendum ut suam ipse edat Nelius, vel aliam saltem expectandam opportunitatem. Hæc autem erat.

Sit A B C *parabola recta; cujus diameter* A B $=$ *a*, *basis* B C $=$ *b*, *sitque* B E $=$ *c*; *& fiat ubique, ut parabola* A B C *ad parabolam* A a c, *sic* B E *ad* a e; (*num autem coincidant necne puncta* C E, *perinde est.*) *Dico rectam* A B *ad* A e E *curvam*, *esse ut* $27\,ac^2$, *ad* $4\,a^2 + 9\,c^2$, *in* $\sqrt{:}\,4\,a^2 + 9\,c^2$. *minus* $8\,a^3$. Fig. 24.

Cum enim sint ubique ut A a c, A a c, *parabolæ; sic* a e, a e, *rectæ: erunt etiam* p e, p e, *rectarum differentiæ; ut* a c c a, a c c a, *differentiæ parabolarum*; *hoc est*, (*sumptis* a a *infinite exiguis*,) *ut* a c, a c, *rectæ; sive ut* a a c, a a c, *rectangula.*

Fiat autem, *ut* AB *ad* BE, (*sive ut* *a* *ad* *c*;) *sic* BK *rectangulum æque altum*, *ad* A B C *parabolam.*

Cum igitur sit $\frac{\square\,BK}{AK} = AB$, *erit* $\frac{Par.\ ABC}{AK} = BE$, & $\frac{Par.\ Aac}{AK} = ae$, & $\frac{\square\,aac}{AK} = pe$.

Ducantur a h *rectæ*, *quæ utrisque* a k, a c, *æque possint*; (*quæ propterea parabolæ segmentum complent*:) *Eritque* $\frac{\square\,aah}{AK} = ee$.

Ut igitur omnes a k, *hoc est rectangulum* B K; *ad omnes* a h, *hoc est parabolæ segmentum* A K H B: *sic omnes* a a, *hoc est* A B *recta*, *ad omnes* e e, *hoc est* A e E *curvam*.

Est autem B K *rectangulum*, *ad segmentum parabolæ* A K H B, *ut* $27\,ac^2$, *ad* $4\,a^2 + 9\,c^2$, *in* $\sqrt{:}\,4\,a^2 + 9\,c^2$: *minus* $8\,a^3$. *Quod sic ostenditur.*

Parabola A B C *est* $\frac{2}{3}$ *ab*. *Ideoque* B K *rectangulum est* $\frac{2\,a^2 b:}{3\,c}$ & $AK = BD = \frac{2\,ab}{3\,c}$. *Ergo* B H ($= \sqrt{:}\ BCq + AKq:$) $= \sqrt{:}\,b^2 + \frac{4\,a^2 b^2}{9\,c^2}: = \frac{b}{3\,c}\sqrt{:}\,9\,c^2 + 4\,a^2$.

Fiat

Fiat autem, ut BHq, *ad* AKq; (*hoc est, ut* $b^2 + \frac{4a^2b^2}{9c^2}$, *ad* $\frac{4a^2b^2}{9c^2}$; *sive, ut* $9c^2 + 4a^2$, *ad* $4a^2$;) *sic* $BH = \frac{b}{3c}\sqrt{:9c^2 + 4a^2}$, *ad* AM; *quæ est igitur* $\frac{4a^2b}{27c^3 + 12a^2c}\sqrt{:9b^2 + 4a^2}$.

Et propterea NH $(= BH - AM) = \frac{3bc}{9c^2 + 4a^2}\sqrt{:9b^2 + 4a^2}$.

Et quoniam, ut NH *ad* AM: (*hoc est, ut* $9c^2$ *ad* $4a^2$;) *sic* NM *sive* $BA = a$, *ad* AF: *erit* $AF = \frac{4a^3}{9c^2}$. *Et* $FB = \frac{9c^2a + 4a^3}{9c^2}$. *Adeoque parabola* $FAK = \frac{16a^4b}{81c^3}$: *Et parabola* $FBH = \frac{18abc^2 + 8a^3b}{81c^3}\sqrt{:9c^2 + 4a^2}$. *Ideoque parabolæ segmentum* $AKHB = \frac{18abc^2 + 8a^3b, \text{in} \sqrt{:9c^2 + 4a^2}.\text{minus } 16a^4b}{81c^3}$.

Est autem rectangulum $BK = \frac{2a^2b}{3c}$, *Ergo Rectangulum* BK, *ad parabolæ segmentum* AKHB; *adeoque* (*ut supra probatum est*) AB *recta, ad curvam* AeE; *ut* $27ac^2$, *ad* $9c^2 + 4a^2$, *in* $\sqrt{:9c^2 + 4a^2}$. *minus* $8a^3$. *Quod erat demonstrandum.*

Meam denique hanc habe.

Esto ADP parabola recta; cujus latus rectum dicatur *L*. Adeoque, sumptis diametris Ad, Ad, *&c*, arithmetice proportionalibus, quæ sigillatim dicantur *d*; ipsaque AD, *D*: Erunt ordinatim-applicatæ $dp = \sqrt{dL}$; ipsaque $DP = \sqrt{DL}$: Et parabolæ abscissæ $Adp = \frac{2}{3}d\sqrt{dL}$; adeoque ad invicem, ut $d\sqrt{d}$, vel $\sqrt{d^3}$: Et ddp rectangula (quæ, sumptis dd particulis infinite exiguis, quæ dicantur *A*, parabolarum differentiis æquipollent) $A\sqrt{dL}$; quę itaque sunt ad invicem, ut $\sqrt{d}$, (sive ut ipsæ dp ordinatim-applicatæ;) atque ad parabolas suas, ut *A* ad $\frac{2}{3}d$. Fig. 25.

Ducatur deinde curva AeE (parabolæ in P occurrens,) eâ lege

lege ut singulæ d e rectæ, sint A d p parabolis proportionales; adeoque ut $d\sqrt{d}$, sive $\sqrt{d^3}$. Quam igitur curvam, ex Paraboloidum genere esse constat; quam *Semicubicalem* appellemus: utpote cujus Ordinatim-applicatæ Diametrorum, si ponatur A D diameter; vel, Diametri Ordinatim-applicatarum, si ponatur diametur A Δ; sunt in ratione *subduplicata-triplicata*.

Cum igitur sint d e ad invicem, ut $d\sqrt{d}$; sitque D E = D P = $\sqrt{DL}$: Erunt d e = $\frac{d}{D}\sqrt{dL}$. Nempe, ut $D\sqrt{D}$ ad $d\sqrt{d}$; sic $\sqrt{DL}$ ad $\frac{d}{D}\sqrt{dL}$.

Cumque sint d e, parabolis A d p proportionales; erunt & differentiæ differentiis proportionales: Adeoque differentiæ f e, tum inter se, tum ad integras d e; easdem habebunt rationes, quas parabolarum differentiæ, tum inter se, tum ad suas parabolas: Nempe illic, ut $\sqrt{d}$ ad $\sqrt{d}$; hic, ut A ad $\frac{2}{3}d$. Adeoque F E = $\frac{3A}{2D}\sqrt{DL}$; (nempe ut $\frac{2}{3}D$, ad A, sic D E = $\sqrt{DL}$, ad $\frac{3A}{2D}\sqrt{DL}$ = F E:) & f e = $\frac{3A}{2D}\sqrt{dL}$. Quibus igitur si ponantur æquales d c erit A D C parabola, cujus latus rectum $\frac{9A^2L}{4D^2}$: quod nempe in diametros d ductum, quadratis ordinatim-applicatarum d c æquabitur.

Earundem vero f e quadrata $\frac{9dLA^2}{4D^2}$, quadratis d d hoc est A^2 addita, exhibent rectarum e e quadrata $A^2 + \frac{9dLA^2}{4D^2}$. Quorum quidem quadratorum augmenta supra A^2 cum sint ipsis d proportionalia; si rectis e e ponantur æquales d b, erit AbBD truncus parabolæ, cujus latus rectum est idem $\frac{9A^2L}{4D^2}$, ordinatim-applicata minima d b = A; adeoque altitudo abscissa A V =

$= \frac{4 D^2}{9 L}$. (Nempe $\frac{9 A^2 L}{4 D^2}$) A^2 ($\frac{4 D^2}{9 L}$.) Quam quidem altitudinis designationem cum *A* quantitas neutiquam ingrediatur; eadem plane futura est, quantulacunque ponatur *A* = d d diametri particula.

Denique, propter tum f e = d c, tum e e = d b; erit, ut ADC parabola ad ADBb truncum; hoc est (propter idem utrobique latus rectum) ut √dA *cub.* ad √ d V *cub.* − √AV *cub*: (ut latus quadraticum cubi d A, ad latus quadraticum cubi d V minus latere quadratico cubi AV:) sic omnes f e, hoc est d e recta; ad omnes e e, hoc est curvam A e e. Quod erat investigandum.

Exempli gratia. Si ponatur A D = 4, & D E = $\frac{16}{3}$; erit

A V = 1, & A e E = $\frac{10\sqrt{5}, -2}{3}$.

Quodque de hac Paraboloidis curva demonstratum est, id aliis non paucis curvarum generibus, quatenus res feret, mutatis mutandis accommodabitur.

Vides itaque quod Heuratius vester, id ipsum nostri demonstrarunt; & quidem priores. Eadem enim est linea quam Nelius noster, vesterque Heuratius considerarunt, (quod tibi, ubi animadverteris, ignotum esse non potest.) Id maxime interest, quod per Tangentes vester, nostri per Inscriptas demonstrarunt. Fundamentum utriusque methodi, nos in dicto scholio prop. 38. Arith. Infin. tradideramus.

Quamquam autem non minore forsan jure licuisset, rectarum hanc curvis æqualium inventionem ex postliminio mihimet ascribere; quam quo alios video eorum avide sibi asscribentes inventionem quorum ipsi fundamenta se jecisse putaverint; præsertim si familiarium aliquibus hæc fundamenta patefecerint, ut ut scripto edito nondum divulgaverint; saltem si suspicio aliqua esse possit hæc sua fundamenta inventoribus illis perspecta fuisse, aut illos inde ansam nactos: Nolim tamen, quum in ipsa praxi me præverti video, hanc suam Nelio nostro εὐτυχίαν invidere; nequidem si constaret (quod non est impossibile) ex nostris traditis ansam accepisse: Neque enim alio fine nostra edimus, quam ut aliis usui esse possint. Quantillum autem inde abfuerim, ex dictis vides.

Hoc

Hoc interim addamus: Eâdem operâ haberi etiam convexam Conoidis superficiem, conversione curvæ A e E circa axim suum A Δ descriptam. Cum enim rectæ d c, d b, ipsis f e rectarum differentiis, & e e subtensis, hoc est, (processu in infinitum continuato,) curvæ particulis, proportionales; atque in iisdem ab A Δ distantiis: Erit ut solidum ex A c D parabolâ, ad solidum ex A b D trunco, circa b A Δ converso factum: sic superficies ex omnibus f e in suis distantiis (quæ est ut series $a \sqrt{a}$) sive $\frac{3}{5}$ (tres quintæ) superficiei Cylindricæ quæ describitur rectâ D E, (hoc est, omnibus f e in maximâ distantia, quæ itaque est ut series $\sqrt{a}$;) ad superficiem convexam quæ ab A e E curva sic conversa describitur. Est autem solidorum eorum ratio (ex nostræ Arithmeticæ Infinitorum principiis) nota: (cognitis enim tum magnitudinibus, tum momentis, adeoque & centris gravitatis, parabolarum A D C, V A b, V D B, adeoque & trunci A b D, solidorum conversione factorum magnitudo pariter innotescet:) Ergo & harum superficierum. *Superficies Conoidis.* Fig. 25.

De ipsius trilinei A e d magnitudine, aut centro gravitatis, aut solidis istius conversione factis, nihil adjicio: nota utique sunt ea omnia; & ex principiis in nostra Infinitorum Arithmetica & alibi traditis facile deducuntur.

Sed ad Parabolam reverto; quam (ut dictum est) in memorato scholio prop. 38. Arith. Infin. Speciatim consideravimus. Resumptâ igitur quæ ibidem est figura; ostendimus, propter d d vel o s (rectarum o t in parabolæ complemento ordinatim applicatarum differentias) ut 1, 3, 5, *&c.* subtensas o o esse ut $\sqrt{:A^2+1}$: $\sqrt{:A^2+9}$. $\sqrt{:A^2+25}$. *&c.* hoc est, ut ordinatim applicatas ad Hyperbolæ conjugatum axim: ipsas autem o s vel d d, ut ordinatim applicatas in Triangulo esse, notius est quam ut dictu opus sit. *Curva Parabolæ.* Fig. 26.

Sin quæratur adhuc, quænam cuique parabolæ conveniant Triangulum & Hyperbola: quamquam ea nullius difficultatis res sit: paucis tamen expediam. Intelligantur K L, L m, ad angulos rectos constitutæ; omnesque L m, Lm, *&c.* ut 1, 3, 5, 7, *&c.* differentiis d d vel o s æquales, vel saltem proportionales; ut & K L ipsi t t vel *A*: Erunt omnes K m, subtensis o o similiter æquales vel proportionales; illis nempe singulæ quæ cum ordinatim applicatis d o angulos faciunt respectivis m K L angulis æquales; Fig. 27.

hoc est, sumptis t t infinite exiguis, curvæ particulis quarum vel subtensæ vel tangentes angulos faciunt iisdem m K L vel n K L æquales. Si fiat igitur NKL triangulum rectangulum, simile triangulo F O D (fig. 26.) quod semiparabolæ circumscribitur: Erit ut omnes Km, ad omnes Lm; sic omnes o o subtensæ, hoc est A O curva, ad omnes o s vel d d differentias, hoc est A D diametrum. Hoc est, (sumptis parallelis m κ = m K, & m λ = m L,) ut omnes mκ (hyperbolâ Kκ, ejusque conjugato axe LN interceptæ) complentes LNκK quadrilineum, ad omnes m L complentes LλN triangulum; sive, ut quadrilineum illud, ad hoc triangulum; sic expositæ parabolæ curva A O, ad A D diametrum. Et consequenter, Datâ parabolicæ lineæ longitudine, dabitur quadratura hyperbolæ; & vice versa. Quod & tu aliunde observasti.

Fig. 28. Vel sic etiam, (ut uno schemate totum complectar,) si fiat ut F D, ad D O, & O F; sic D O vel T A, ad A K; & T κ = K T: & describatur K κ hyberbola, verticem habens K, centrum A: &, sumpta T λ = T A, fiat A T λ triangulum: Erit, ut A T λ triangulum, ad A T κ K quadrilineum; sic axis A D, ad A O curvam parabolæ. Addo, Et partes partibus respective sumptis proportionales esse: ut ex demonstratis patet. (Habet autem hæc Hyperbola latus rectum lateri transverso æquale, & utrumvis lateri recto Parabolæ æquale, duplum autem rectæ A K: Estque A, hyperbolæ centrum; K, vertex; A T, axis conjugatus; A λ, Asymtota; K δ, axis interceptus; & δ κ = AT ordinatim applicata basis.) Atque hactenus de Parabolæ curvâ.

Conoidis Parabolici superficies. Sed & eâdem operâ, de conoidis Parabolici superficie judicandum erit. Cum enim singulæ rectarum t o differentiæ, ad respectivas curvæ particulas, sint ut t λ ad t κ, sintque in iisdem ab axe distantiis: Erit ut solidum ex conversione A T λ trianguli, ad solidum ex conversione A T κ K quadrilinei, circa AK rectam; sic superficies ex omnium curvarum t o differentiis sic conversis, ad conoidis superficiem ex conversis curvæ particulis. Quæ autem ex differentiarum illarum, arithmetice proportionalium, in distantiis item arithmetice proportionalibus, conversione describitur; ad superficiem earundē arithmetice proportionalium, in distantia maximâ, conversione descriptam, (series Secundanorū ad seriem Primanorum;) hoc est, ad curvam Cylindri circumscripti; est, ut 2 ad 3. Ergo, ut solidum ex ATλ trianguli conversione, ad solidum

ex

ex conversione A T ϰ K quadrilinei, circa A K, descriptum; sic $\frac{2}{3}$ superficiei curvæ Cylindri circumscripti, ad curvam conoidis parabolici superficiem. Est autem quod fit ex illa trianguli conversione, $\frac{2}{3}$ Cylindri altitudinis T λ: Quod autem ex quadrilineo sic converso efficitur, est Cylindrus (ejusdem basis) altitudinis T ϰ, dempto Conoide Hyperbolico. Est autem Conoides illud Hyperbolicum (per prop. 163, 164. Arith. Infin.) ad circumscriptum Cylindrum, ut $\frac{1}{2}T + \frac{1}{3}D$ ad $T + D$, (semissis lateris transversi una cum triente diametri interceptæ, ad ejusdem lateris transversi & diametri aggregatum:) Hoc est, ut A K + $\frac{1}{2}$ K δ ad A K + T ϰ: Adeoque cylindrus sic hyperbolice excavatus, ad eundem plenum; ut $\frac{1}{2}T + \frac{2}{3}D$ ad $T + D$, sive ut A K + $\frac{2}{3}$ K δ ad A K + T ϰ. Ergo (propter æquales omnium bases,) Ut $\frac{2}{3}$ T λ; ad T ϰ minus $\frac{\text{A K} + \frac{1}{3}\text{K δ}}{\text{A K} + \text{T ϰ}}$ K δ; vel ad A K + $\frac{\text{A K} + \frac{2}{3}\text{K δ}}{\text{A K} + \text{T K}}$ K δ: sic $\frac{2}{3}$ superficiei curvæ cylindri circumscripti, ad curvam conoidis parabolici superficiem: Et (multiplicatis antecedentibus in $\frac{3}{2}$,) ut T λ, ad eandem A K + $\frac{\text{AK} + \frac{2}{3}\text{K δ}}{\text{A K} + \text{T ϰ}}$ K δ; sic cylindri circumscripti superficies curva, ad curvam Conoidis parabolici superficiem. Quæ num inventis tuis consentiant, vide sis.

Quam vero eadem parabolæ curva circa AT conversa superficiem describit, (propter tum differentiarum rectarum to, tum particularum curvæ, ab AT distantiam to, in earundem ab A K distantiæ ratione duplicatâ,) erit ea superficies curva, ad circulum semidiametri A D: non quidem ut ipsa solida modo dicta, (ex conversione quadrilinei A K ϰ T, & trilinei A λ T, circa A K,) sed ut semisolidorum horum momenta respectu A K rectæ; vel ut omnes t ϰ ad omnes t λ, in respectivarum suarum ab A K distantiarum quadrata. Quæ quidem ratio, non magis explicabilis est, quam ipsa Quadrilinei ad Trilineum ratio.

Verum (ut ad alia etiam, extra Paraboloidum genera, transeamus:) Perpendamus curvam A B C fig. 7. quam *Ellipsin expansam* dicimus. Quadrata particularum hujus, vel earundem subtensarum, sunt ut quadrata differentiarum sinuum versorum (incipiendo ab A vel C,) sive differentiarum sinuum rectorum (utrinque a B procedendo,) quadratis æqualibus aucta. (Quod ex ipso

Ellipsis expansa. Fig. 7.

ipso Schematis inspectu patet.) Quam igitur rationem habent eorundem quadratorum sic auctorum latera quadratica, vel ad quadratorum æqualium latera, vel ad omnes illas sinuum differentias, eam habet A B C curva, vel ad A F vel ad F C. (Quod & de partibus respectivis intelligendum est.) Quæ tamen ratio non magis explicabilis est, quam perimetri Ellipseos, ad peripheriam Circuli, vel hujus diametrum. Quæ enim erant in fig. 2. F z C, F ζ Γ, Circuli & Ellipseos semiperimetri in superficie Cylindricâ; eædem sunt in eadem expansa, fig. 7. A F recta, & A B C curva. Ut igitur A F recta, ad A B C curvam; sic semiperimeter Circuli, ad semiperimetrum Ellipseos, cujus minor axis æqualis sit diametro circuli; major, ejusdem duplum possit. Uti &, in fig. 10. F A, & F C, sunt ut quadrans perimetri circularis, ad quadrantem Ellipseos, cujus major Axis minoris posset quintuplum. Et in aliis similiter, variatâ curvaturæ mensura, pro variâ conjugatorum axium ratione.

Cycloidis socia. Estque hæc, ni fallor, ea recta quam *Cycloidis Comitem vel Sociam* (*la Compagne de la Roulette*) appellat Author Historiolæ, utut aliter apud ipsum atque me generata. Quam enim ille dimidiam *ductu circini in superficie Cylindri recti*, descriptam dicit; nos simplicius *sectione Cylindri plano factâ*, totam describimus. Nescivisse sicui em videtur, curvam A B C fig. 7. non aliam esse quam Ellipsin F ζ Γ fig. 2. in planum expensam. Si autem centro C, distantia C F, in superfice cylindri fig. 2. circini ductu describatur linea, non erit illa F ζ Γ Ellipsis, (communi plani & Cylindri sectione facta,) sed alia curva, communi Sphæræ & cylindri sectione facta, quæ in planum expansa omnino similis erit curvæ B C fig. 7. prioris semissi. Si enim intelligatur, (in fig. 2.) F ζ Γ circini ductu descripta, adeoque C ζ recta, ubique ipsi C F æqualis, unde demissa ζ z in superficie cylindri occurrat basi in z: Quia tum C z & z F subtensæ, tum C z & z ζ, æque possint ipsi C ζ rectæ, hoc est C F; erit z F subtensa æqualis ipsi z ζ; Adeoque omnes z ζ (divisa F z C in partes æquales in punctis quotlibet z) erunt ut chordæ arcuum in semicirculo arithmetice proportionalium, hoc est, ut sinus recti in quadrante, hoc est, ut rectæ trilineũ B b C fig. 7. complentes, ipsi B b ordinatim applicatæ.

Fig. 2.

Adeoque si intelligatur semicylindro F z C Γ fig. 2. similis alius cujus basis diameter sit semissi hujus F C æqualis; Curva

ut F ζ Γ circini ductu descripta in superficie minoris; & semissis F ζ Γ semiellipseos in superficie majoris, si in planum utraque expandatur, congruent.

Porro si intelligatur, non jam F A ut in fig. 7, hoc est F z C fig. 2. sed F C ut in fig. 30. sive C Γ, vel C F recta, vel etiam F Γ, fig. 29. dividi æqualiter; adeoque F A fig. 30. hoc est F z C fig. 29. dividi pro ratione arcuum ordinatim applicatis sive sinubus rectis æqualiter distantibus respondentium: Erunt (in partibus infinite exiguis) quadrata particularum A B C curvæ, huic divisioni respondentium; ut quadrata differentiarum horum arcuum, quadratis æqualibus aucta. (Quorum omnium radices, ad omnes illas vel differentias, vel diametri particulas æquales, sunt, ut A B C curva ad rectam A F, vel ad F C: quibus quidem aggregatis proportionales superficies planas, facile est concipere; sed non ita facile ratione notâ explicare, magis quam rationem curvæ Ellipseos, ad circuli vel peripheriam, vel diametrum.) Sunt autem illæ arcuum differentiæ (propter arcuum infinite exiguorum & chordarum quasi-coincidentiam, adeoque & centrorum gravitatis, utpote quæ arcui & chordæ interjecta esse debent,) ut $\frac{RA}{s}$, hoc est factum ex R radio & diametri aliquota parte exigua A, per sinum rectum s divisum: (Quod ex Archimedis & aliorum demonstratis, qui superficierum, Sphæricæ & circumscriptæ Cylindricæ, segmenta, parallelis planis abscissa, æqualia esse ostenderunt, facile colligitur: nempe $RA = sc$, factum ex Radio in A, æquale esse facto ex s ejusdem distantia à diametro, in c correspondentem curvæ particulam:) Adeoque illarum quadrata $\frac{R^2 A^2}{s^2}$; quæ quadratis æqualibus A^2 (propter F C = C Γ) aucta, exhibent $\frac{R^2 A^2}{s^2} + A^2$, quadrata particularum curvæ A B C; eorumque omnium radices, curvam ipsam: Hoc est, (propter $s = \sqrt{:R^2 - a^2}$: sumptis a utrinque à medio, ut 1, 2, 3, &c, successive,) $\frac{R^2 A^2}{R^2 - a^2} + A^2$ =

Curva Ellipseos. Fig. 29. & 30.

$= \frac{2R^2A^2 - a^2A^2}{R^2 - a^2}$ ipsa quadrata; eorumque radices $A\sqrt{:}\frac{2R^2 - a^2}{R^2 - a^2}$. Ipsæ autem arcuum circularium differentiæ $\frac{R \cdot A}{s} = A\sqrt{\frac{R^2}{R^2 - a^2}}$. Adeoque ut illæ omnes, ad omnes has; sic Ellipseos expositæ perimeter, F ζ Γ, vel A B C, ad peripheriam circuli F z C, vel A F. (Quod & aliis Ellipsium speciebus facile accommodabitur, ut mox docebitur.)

Sphæroidis oblongi superficies.

Deinde, Si intelligantur tum Ellipseos illæ, tum hæ perimetri circularis particulæ, in iisdem respective à suis axibus distantiis converti; unde fiat illic, Sphæroidis oblongi; hic, Sphæræ superficies: Erit superficies illa ad hanc; ut omnes $A\sqrt{:}\, 2R^2 - a^2$: ad totidem AR; sive, ut omnes $\sqrt{:}\, 2R^2 - a^2$: ad totidem R: Hoc est, (si intelligatur in parallelogrammo (fig. 31.) A B $= R\sqrt{2}$, & A R $= R$, adeoque a r $= a$, reliquaque ut in schemate constructa,) ut R C B A quadrantis circuli segmentum, ad quadratum A R minoris semidiametri. Sunt enim omnia b r b rectangula, hoc est $R\sqrt{2} + a$ in $R\sqrt{2} - a$, hoc est, $2R^2 - a^2$; ut rectarum r c quadrata: adeoque omnes r c rectæ, ut $\sqrt{:}\, 2R^2 - a^2$. Quod etiam ex prop. 124 Arith. Infin. fusius patebit.

Fig. 31.

Eodem modo, ad alias Ellipsium species res accommodabitur. Si hoc saltem advertatur; In præsenti casu, propter FC $=$ CΓ fig. 2. vel 29. aliquotas partes tum rectæ FC tum rectæ CΓ, eodem symbolo A designari. Sin recta CΓ (quæ potest excessum quadrati axis longioris supra brevioris quadratum) vel longior esset vel brevior quam F C (circuli diameter, vel Ellipseos axis minor,) puta ut H ad R; positâ A aliquota parte diametri circularis (ut prius,) erit $\frac{H}{R}A$ eadem pars rectæ C Γ: Adeoque pro $\frac{R^2A^2}{R^2 - a^2} + A^2$, sumendum erit $\frac{R^2A^2}{R^2 - a^2} + \frac{H^2}{R^2}A^2$. Adeoque Sphæroidis illa superficies, ad superficiem Sphæræ, erit ut omnes $\sqrt{:}\, R^2 + H^2 -$

a^2

$\frac{a^2 H^2}{R^2}$: ad totidem R. Ideoque ponendum erit, fig. 31. A B $=$ $\sqrt{:R^2 + H^2:}$ & A R $= H$ (semissi rectæ C Γ fig. 29,) quare & a r $= \frac{aH}{R}$. Eritque, ut prius, Ut A B C R quadrantis circularis segmentum, ad totidem R, hoc est ad $H \times R$: sic superficies illa Sphæroidica ad Sphæricam. (Et partes partibus respectivè proportionales.) Est autem, ut patet, A B, ellipseos semiaxis maior; R C, semiaxis minor; A R, distantia foci à centro, sive recta quæ potest differentiam quadratorum semiaxium.

Dico igitur, *Si in circuli quadrante cujus radius* A B *ellipseos semiaxis maior, ordinatim applicetur* R C *semi axi minori æqualis, & compleatur* A R C *rectangulum: Erit ut* R C B A *quadrilineum, ad* A R C *rectangulum; sic Sphæroidis oblongi superficies, ad superficiem inscriptæ Sphæræ.*

Intelligatur jam Cylindrus F Γ C z fig. 29, obliquus esse, cujus basis F ζ Γ circulus; & F z C Ellipsis, axi recta, cujus minor axis F C. Cum igitur, divisâ F Γ circuli diametro in partes æquales numero infinitas, quorum quælibet dicatur A, & particulæ peripheriæ (ut prius ostensum est) $\frac{RA}{s}$ vel $\frac{RA}{\sqrt{:R^2 - a^2}}$, & harum particularum quadrata $\frac{R^2 A^2}{R^2 - a^2}$; unde si auferantur quadrata æqualium particularum rectæ C Γ, puta $\frac{H^2}{R^2} A^2$ (sumpto scilicet, ut C Γ ad F Γ, sic H ad R;) erunt $\frac{R^2 a^2}{R^2 - A^2} - \frac{H^2}{R^2} A^2$ quadrata particularum Ellipseos F z C; eorumque radices $\sqrt{:\frac{R^2 A^2}{R^2 - a^2} - \frac{H^2}{R^2} A^2:}$ ipsæ particulæ. Quæ quidem utræque particulæ (tum Peripheriæ, tum Ellipseos,) si in suas easdem a suis axibus respectivas distantias $s = \sqrt{:R^2 - a^2:}$ ducantur: Facta (superficiebus harum conversione circa suos axes proportionalia) sunt, illic RA; hic, $A\sqrt{:R^2 - H^2 + \frac{a^2 H^2}{R^2}:}$ Adeoque

Sphæroidis lati superficies.

Fig. 29. 30.

Adeoque Sphæroidis lati superficies (conversione Ellipseos circa minorem axem descripti) ad superficiem Sphæræ circumscriptæ,

Fig. 28. ut omnes $\sqrt{: R^2 - H^2 + \frac{a^2 H^2}{R^2}}$; ad totidem R. Hoc est, ut quadrilineum A T κ K fig. 28. hyperbolæ suoque axi conjugato interjectum (cujus semilatus transversum A K = $\sqrt{: R^2 - H^2}$: & A T = H, T κ = R;) ad A T λ rectangulum.

Hoc est, *Si, ab Hyperbola cujus semilatus tum rectum tum transversum* A K, *Ellipseos semiaxi minori æquetur; ad conjugatum axem ordinatim applicetur* κ T *semiaxi Ellipseos majori æqualis; & compleatur* A T κ *rectangulum: Erit, ut* A T κ K *quadrilineum, ad* A T κ *rectangulum; sic superficies Sphæroidis lati, ad circumscriptæ Sphæræ superficiem.*

Fig. 32. Vel sic, elegantius paulo, utrumque simul efferamus. *Sint ellipseos axes conjugati,* A C E *maior,* B C H *minor, &* B D (*parallela* C F) *circumscripti circuli quadranti* E K *occurrens in* D: *& compleatur* C B D F *rectangulum. Sumatur, in* D F *continuatâ,* F G *æqualis* C E. *Denique centro* C *vertice* H, *scribatur* H G *hyperbola; & compleatur* C F G I *rectangulum. Intelligatur autem tum axe* A E *sphæroides oblongum, tum axe* B H *sphæroides latum, ellipseos conversione describi. Erit, ut* C F D K *quadrilineum, ad inscriptum rectangulum* C F D B; *sic Sphæroidis oblongi superficies, ad superficiem inscriptæ Sphæræ: Atque, ut* C F G H *quadrilineum, ad rectangulum circumscriptum* C F G I; *sic superficies sphæroidis lati, ad circumscriptæ sphæræ, superficiem.* Addo etiam, *& partes partibus respective sumptis proportionales esse,* (nam & de partibus etiam procedit demonstratio:) Hoc est, si in eadem ratione, ordinatim applicatis secta intelligatur recta C F, qua sphæroideos & comparatæ Sphæræ Axes secantur plano. Datâ verò ratione quam habet Sphæroideos ad Sphæræ superficiem, vel etiam istius partes ad partes hujus; rationem item ad circuli planum dari nemo nescit. Sed de his hactenus.

Linea Spiralis longitudo. Fig. 33.

Accedo ad Spiralem, quam & memorato loco (Schol. prop. 38. Arith. Infin.) consideravimus. Intelligatur, intra spiralem lineam inscribi, figura ex similibus sectoribus conflata. Horum arcus, propter æqualia radiorum augmenta (ut C A = A) arithmetice proportionales esse ostendimus: Adeoque & arcuum horum

rum (quippe similium) tum chordas (S C = c,) tum sinus re- Fig. 33.
ctos (S V = s) & versos (V C = v) arithmetice item proportionales esse: Et propterea Subtensarum Spiralis quadrata, S A q = SV q + V A q = $s^2 + v^2 + 2\,v\,A + A^2 = c^2 + 2\,v\,A + A^2$, ut quadrata Æqualia, tum quadratis arithmetice proportionalium, tum planis arithmetice proportionalibus, aucta: (Quod ibidem fusius ostensum est.) Hoc est, ut quadrata ordinatim-applicatarum in hyperbolâ, quadratis æqualibus aucta. Adeoque, dummodo determinatus est numerus Sectorum, unde & angulus ad centrum determinatæ magnitudinis, manifestum est has spiralis subtensas subtensis in parabola supra memoratis (quarum utique quadrata, quadratis æqualium quadratis arithmetice-proportionalium sive ordinatim-applicatarum in triangulo auctis, æqualia suprà diximus,) minime convenire. Quoniam vero, in minoribus angulis ratio sinus versi ad rectum minor est, eaque semper prout minuuntur anguli diminuitur, adeo ut eò tandē perveniatur ut datâ quâlibet minor sit; unde in angulis infinite exiguis, propter rationem sinus versi ad rectum infinite exiguam, evanescere intelligendus est V C sinus versus (coincidentibus quasi tum arcu tum chordâ tum sinu recto; quod quidem intelligendum erit, ubi SA subtensæ pro spiralis particulis reputantur;) adeoque quantitas v, & propterea $2vA$, pro nullâ reputanda: Erit, hoc casu, $c^2 + 2\,v\,A + A^2$ tantundem atque $c^2 + A^2$; Adeoque particulæ Spiralis, non minus quam Parabolæ, erunt, ut quadratorum æqualium, quadratis Arithmetice-proportionalium auctorum, latera, sive ut rectæ $\tau\,\kappa$ fig. 28. unde linearum Spiralis & Parabolicæ æqualitatem manifestam esse constat.

Linearum Spiralis & Parabolicæ æqualitas.

Quæ quidem inventio, num Hobbio, an Robervallio, debeatur, (uterque enim vendicat,) non determino; an inter utrumque dividenda. Certum est, Mersennum Robervallio tribuere: contendit autem Hobbius se primum invenisse, prætendit utique (quam suam prætensionem cum *Elenchum* meum scripsi non audiveram) se Robervallio rem totam pridie communicasse, eum autem, hac ansa datâ, postride demonstrationem suam adornasse. Quicquid sit, cum res facti sit, nolo ego me arbitrum interponere. Propositionem autem, cujuscunque demum sit, veram esse, comprobat hæc nostra demonstratio.

Hanc autem demonstrationem nostram, figurarum inscriptione

& circumscriptione ad morem veterum, fusius tradi posse, non opus est ut ego te moneam; qui probè nôris quam facile hujusmodi demonstrationes contractę, ad operosas illas veterum reduci possint, modo quis id tanti esse putaverit. Atque hactenus de Spirali Archimedea.

Spiralis alia. Fig. 33. Intelligamus jam alîus generis Spiralem describi; in qua, verbi gratia, radiorum incrementa CA non sint æqualia, sed eâdem ratione continue crescant qua crescunt arcus SC, vel MS radii. Id autem fiet si intelligamus, vel, manente circumductæ rectæ MA motu æquabili, punctum lineans moveri ab M ad A motu æqualiter accelerato; vel, manente puncti lineantis ab M ad A motu æquabili, rectam MA circumduci motu æquabiliter retardato, nempe ut quo longius à medio recesserit punctum lineans eo tardius circumferatur recta; (unde consequetur puncti lineantis, in ipsa curvâ descriptâ, motus æquabilis, vel æque velox.)

Re sic constructa, manifestum est, tum omnia similium sectorum triangula SVC inter se esse similia, tum omnia SVA, vel SCA, triangula rectilinea vel mistilinea, tum omnia SMA item inter se similia. Unde & angulus ad A, (quem vel SA curva, vel ejusdem subtensa SA, vel etiam tangens, cum MA faciat,) tum quivis esse potest (pro varia motuum inter se ratione) tum ubique idem erit.

Erunt autem omnes SA rectæ, hoc est (in partibus exiguis) omnes SA curvæ ad omnes AV, hoc est (in partibus exiguis) ad omnes AC, hoc est ad AM rectam, ut AS ad AV; sive ut Hypothenusa ad Basin Trianguli rectanguli, angulum habentis ad basin, angulo A æqualem; illi nempe, quem curvæ Tangens cum Radiis constituit.

Fig. 34, 35. Construetur autem hujusmodi Spiralis; si sumptis, (ut in fig. 34,) rectis MA, M1, M2, M3, &c. continue proportionalibus, radiis hisce describantur totidem sectores similes, eisque circumscribatur A 1 2 3 &c curva.

Si fiat autem, ut fig. 35, super æquali MA basi, triangulum rectangulū MAS, angulum A æqualē habens: Erunt curvæ A1, 1 2, 2 3, &c, in spirali, rectis A 1, 1 2, 2 3, &c, in trianguli hypotenusa, singulæ singulis respective ęquales, & omnes omnibus: Adeoque A 1 2 3 &c curva, rectæ AS æqualis. Spatia vero trilinea Spirali adjacentia AM1, 1M2, 2M3, &c, trapeziorum in triangulo

angulo subdupla. Totumque triangulum, totius spatii Spiralis duplum; si nempe intelligantur convolutiones interiores toties repeti quoties novis circulationibus iterato describuntur.

Nam revera; uti Spiralis Archimedea, non aliud est quam Parabola convoluta; aut etiam Circulus vel Circuli Sector, convolutum Parallelogrammum, (quod prop. 16. Arith. Infin. ostendimus:) Sic spiralis hæc, fig. 34, non aliud est quam ipsum MAS triangulum (fig. 35.) convolutum; contractâ nempe in punctum rectâ SM, adeoque parallelogrammis (sive inscriptis sive circumscriptis numero infinitis) in totidem triangula redactis.

Notandum autem hic est; Tum propter radiorum MA, M1, M2, *&c.* (vel rectarum in triangulo his respondentium) continue proportionalium processum in infinitum, decrescendo; tum etiam propter eundem ubique Tangentis angulum cum rectâ circunductâ factum, (unde, circuendo, ad punctum M medium, nunquam perveniri poterit;) Manifestum est, Spiralem hanc introrsum (non minus quam extrorsum) esse interminabilem. Neque enim ab A per 1 2 3 *&c.* quotcunque demum circulationibus peractis, ad medium unquā pervenietur, magis quam, sumptis A1, 12, 23, *&c.* proportionalibus, exhaurietur unquam AS recta. Ut autem hæ omnes in infinitum continuatæ, sic A 1 2 3 *&c.* continuata introrsum in infinitum, æquabit rectam AS. Habes itaque *curvam interminabilem terminatæ rectæ æqualem.*

Sed & fatendum erit, Tangentem spiralis hujus, non magis duci posse Geometrice, quam spiralis Archimedeæ, (ut quæ ex quadratura circuli dependeat, ut & Spiralium omnium Tangentes;) adeoque nec angulum A geometrice assignari. Linea tamen interminabilis terminatæ rectæ æqualis, non minus sine hoc assignabitur: Si nempe, sumatur triangulum, non rectangulum, ut ASV fig. 33. sed triangulo ASC simile; ut enim AC ad AS, sic omnes AC hoc est AM recta ad omnes AS rectas arcubus AS numero infinitis inscriptas.

Hanc ipsam curvam, aliâ occasione, contemplatus item est Wrennius noster. Nec tantum curvæ longitudinem, partiumque ipsius, & magnitudinem adjacentis plani: sed &, ipsius ope, Limacum & Conchiliorum domunculos metitur. Existimat utique, magna verisimilitudine, domunculos hosce non alios esse quam Pyramides convolutas; quarum Axis sit, istiusmodi Spiralis; non

quidem in plano jacens, sed sensim in convolutione (circa erectum axim) assurgens: pro variis autem curvæ, sive ad rectam circumductam, sive ad subjacens planum, angulis; variæ Conchiliorum formæ enascantur. Atque, hac hypothesi, mensuratâ Pyramide, metitur etiam ea conchiliorum spatia. Et quidem de hac spirali hactenus.

Spirales aliæ. Putâram hic aliam Spiralis speciem tradidisse; eam nempe quæ ex convolutâ Paraboloide Semicubicali ortum duceret. Cujus itaque curva quum Paraboloidis illius curvæ æquetur, quam æqualem esse rectæ jam ostendimus; etiam Curva Spiralis inde oriundæ, æqualis rectæ ostenderetur. Sufficiet autem universim dixisse, Spirales omne genus, ex hujusmodi planis (sive triangula sint, sive trapezia, vel parallelogramma, sive Parabolæ, aut paraboloides, aut etiam hyperbolæ, aliæve vel rectilineæ vel mistilineæ figuræ,) sic convolutis oriundas, curvas habere curvatis planorum sic convolutorum lateribus, ut A S, æquales; & quidem, *Fig. 35.* opposito latere, ut A M, in punctum contracto, spatium spirali adjacens, figuræ nondum convolutæ semissem.

Atque hactenus specimina tradidimus methodi nostræ, subtensarum ope, rectificandi curvas.

Quoniam vero, Tangentium ope (in memorato Scholio *prop.* 38 *Arith. Infin.*) id etiam fieri posse insinuavimus: libet & hujus item aliquot specimina exhibere.

Curva Parabolæ. *Fig. 36.* Atque à Parabola initium desumam, id ipsum Tangentium ope demonstraturus, quod supra per Inscriptas ostendimus. Intelligatur itaque in fig. 36. A T, parabolam rectam in vertice tangens, in punctis t quotlibet æqualiter divisa; adeoque A t, sive d o, arithmetice proportionales, quæ dicantur p; earumque communis excessus b o = t t dicatur A: Erit autem o t = d A $= \frac{p^2}{L}$; adeoque (propter t s $= \frac{1}{2}p$) tangens o s $= \sqrt{:}\ \frac{1}{4}p^2 + \frac{p^4}{L^2}: = \frac{p}{2L}\sqrt{:}\ L^2 + 4p^2$. Occurrat autem quælibet o t, proximæ tangenti o s, in c. Eritque ut s t $= \frac{1}{2}p$, ad s o; sic b o = t t $= A$, ad o c $= \frac{A}{L}\sqrt{:}\ L^2 + 4p^2$. Sive AL, ad $A\sqrt{:}\ L^2 + 4p^2$: vel

L,

L, ad $\sqrt{:L^2+4p^2}$: aut $\frac{1}{2}L$ ad $\sqrt{:\frac{1}{4}L^2+p^2}$. Adeoque ut omnes $\sqrt{:\frac{1}{4}L^2+p^2}$: ad totidem $\frac{1}{2}L$; sic omnes oc tangentes, hoc est, (in partibus exiguis) o o curvæ, hoc est A O curva, ad omnes t t, hoc est rectam A T vel D O. Hoc est, si fig. 28. ponatur A K $= \frac{1}{2}L$ semilatus tum rectum tum transversum hyperbolæ K κ; & A T ut in parabola: Erit, ut T A K k rectangulum, ad T A K κ quadrilineum: sic A T tangens, vel basis D O, ad A O curvam parabolæ. Et partes partibus respective proportionales. Quod quidem supra inventis convenit, ubi axem A D ad A O curvam esse ostendimus, ut T A λ triangulum, ad idem T A K κ quadrilineum. Nam ut Triangulum T A $\lambda =$ $\frac{1}{2}dL$, ad rectangulum T A K $= \frac{1}{2}L\sqrt{dL}$; hoc est, ut d ad $\sqrt{dL}$: sic A D ad A T. Fig. 28.

Sed & hinc simili modo atque supra, inveniemus superficiem convexam conoidis parabolici. Nempe (ob easdem particularum t t & $\kappa\,\kappa$ distantias ab A K,) Erit ut Cylindrus ex conversione T K parallelogrammi, ad Cylindrum ex simili conversione parallelogrammi Tδ minus conoide hyperbolico ex conversione K $\delta\,\kappa$ hyperbolæ, (circa eandem A δ rectam;) sic circulus radio A T descriptus, ad conoidis superficiem conversione A O curvæ descriptam. Quod & supra traditis etiam convenit. Nam eadem est ratio circuli radio A T descripti, ad duas tertias superficiei cylindricæ recta T O descriptæ, quæ est solidi ex conversione T A K rectanguli, ad solidum ex conversione trianguli T A λ, circa eandem A K. Quare & eadem superficies Conoidis utrovis modo proveniet. *Conoidis Parabolici superficies.*

Sed intelligamus jam (non A T, sed) A D in punctis d æqualiter divisam: adeoque d A $= d$ arithmetice proportionales, & d d $= A$ æquales, & d o $= \sqrt{dL}$, & (propter d f duplam rectæ d A) tangentes o f $= \sqrt{:4d^2+dL}$. Item (continuatis d o donec proximæ quæque tangenti o f occurrat in i) ut d f $= 2d$, ad f o: sic d d $= A$, ad o i $= \dfrac{A\sqrt{:4d^2+dL}}{2d} = \dfrac{A\sqrt{:d^2+\frac{1}{4}dL}}{d}$. *Curva Parabola.* Fig. 36.

Adeoque si ad eundem A D axem construatur tum A D Δ triangulum isosceles rectangulum, tum ADH hyperbole (cujus tum latus rectum tum transversum sit $\frac{1}{4}L$,) atque A D E rectangulum cujuscunque latitudinis, (adeoque singulas e d singulis A

 vel

vel æquales vel saltem proportionales;) Et fiat, ubique, ut d δ = d, ad d e = A; sic d h = $\sqrt{: d^2 + \frac{1}{4} d L}$: ad d g: erit ut ADE rectangulum, ad ADGg quadrilineum (interminabile quidem, sed magnitudine finitum;) sic axis AD, ad AO curvam parabolæ. Et partes partibus respective proportionales.

Fig. 36.

Conoidis superficies.

Porro, si ducantur omnes tum d d, tum i o, in suas easdem à vertice respectivas distantias d: reperiuntur momenta (respectu AT rectæ) rectarum d d, ad momenta rectarum o i, hoc est (in partibus exiguis) curvarum o o; ut $d A$ ad $A \sqrt{: d^2 + \frac{1}{4} d L}$: sive ut d ad $\sqrt{: d^2 + \frac{1}{4} d L}$: Hoc est ut d δ ad d h. Omnium igitur o b, hoc est d d, hoc est AD rectæ, momenta, ad momenta omnium o i, hoc est o o, hoc est AO curvæ, (respectu ejusdem AT;) est, ut triangulum AD△, ad ADH hyperbolam: Et consequenter (utpote momentis proportionalium) eadem est ratio Circuli radio AD descripti, ad curvam conoidis superficiem (convexo-concavam) curvæ AO circa AT conversione descriptam.

Centrum gravitatis.

Denique, Quoniam o b (rectarum t o differentiæ) & o o, in iisdem reputandæ sunt ab AD distantiis; adeoque & superficies earundem respective circa AT conversione descriptæ, in iisdem item distantiis, nempe d o = $\sqrt{d L}$; sintque superficies illæ, ad has, (quod modo ostensum est,) ut d δ = d, ad d h = $\sqrt{: d^2 + \frac{1}{4} d L}$: Ductis utrisque in eandem $\sqrt{d L}$ distantiam; reperitur superficierum omnium rectis illis o b, ad superficierum omnium curvis o o, sic descriptarum, momenta, ut omnes $d \times \sqrt{d L}$, ad omnes $\sqrt{: d^2 + \frac{1}{4} d L} : \times \sqrt{d L}$; hoc est ut, $\sqrt{d^3 L}$, ad $\sqrt{: d^3 L + \frac{1}{4} d^2 L^2}$: hoc est ut $d \sqrt{d L}$, ad $d \sqrt{: d L + \frac{1}{4} L^2}$: Hoc est, ut momentum parabolæ qualis ADC fig. 25. ad momentum trunci, qualis ADBb, respectu ejusdem A b rectæ: (Si nempe intelligatur AV altitudo abscissa fig. 25. æquare $\frac{1}{4} L$ quadrantem recti lateris parabolæ expositæ fig. 36. Et axis AD utrobique æqualis: & latus rectum L.) Manifestum utique est, omnes $\sqrt{d L}$ esse ut ordinatim-applicatas in parabola, & omnes $\sqrt{: d L + \frac{1}{4} L^2}$ ut ordinatim-applicatas in parabolæ trunco: quæ utræque in d ductæ exhibent rationes momentorum: Quæ quidem ratio, (propter cognitas tum magnitudines, tum centra gravitatis, parabolæ & trunci,) cognita est. Habetur autem momentum planorum rectis o b, circa AT conversis descriptorum; est utique (propter plana ipsa

æqualibus

æqualibus rectis ob in diſtantiis ab A T arithmetice proportionalibus converſis deſcripta, arithmetice proportionalia; eorumque diſtantias ab A D in illarum ratione ſubduplicata; adeoque ipſorum momenta ut ſeries $a\sqrt{a}$: eorundem vero planorum in diſtantiis maximæ æqualibus, hoc eſt circuli radio T O deſcripti, momentum, ut ſeries a:) ad momentum circuli radio T O deſcripti reſpectu A D rectæ: ut ſeries $a\sqrt{a}$, ad ſeriem a: adeoque ut $\frac{2}{5}$, ad $\frac{1}{2}$: ſive ut 4, ad 5. Et propterea, datâ ſuperficiei magnitudine, dabitur ejuſdem centrum gravitatis.

Cum autem (ut vides) in demonſtrationibus aſſumpſerim, nunc o c, nunc o i, tangentium particulas, in diviſionibus exiguis ipſi o o curvæ particulis coincidere: ne hæſites tamen num hoc temere fecerim; id tutò factum intelligas, modo animadvertas rectas o i, o c, angulo contactus ſubtenſas, pro diminutione o c, o i, tangentium, ita minui, ut illæ ad has rationem tandem ſubeant datâ quâvis minorem, (ſecus enim, angulus rectilineus aſſignari poſſet angulo contactus minor,) ideoque evaneſcentibus o i, o c, tangenti & curvæ interjectis, coincident, tum o c, tum o i, tangentis particulæ, particulis curvæ o o.

Paraboloides ſemicubicalis.

In *Paraboloide ſemicubicali*, quam ſupra memoravimus, ſimiliter atque in Parabola, per Tangentes item id ipſum expediri poſſe, quod per ſubtenſas ſuperius abſolvimus, paucis oſtendam.

Fig. 36.

Intelligatur itaque A O fig. 36. (non jam Parabola, ſed) Paraboloides ſemicubicalis: cujus nempe ordinatim-applicatæ d o = A t, ſint in diametrorum d A ratione *ſubtriplicatæ duplicata*: (adeoque d A diametri in ipſarum A t ratione *ſubduplicatæ triplicata*:) Et propterea d f ad d A, ut 3 ad 2; & t s ad t A, ut 2 ad 3. Sumptis itaque A t, A t, arithmetice-proportionalibus, quæ dicantur p, earumque communis exceſſus A = t t, diameter vero d A $= d = \sqrt{\frac{p^3}{L}}$: Erit tangens o s $= \sqrt{:\frac{4}{9}p^2 + \frac{p^3}{L}} = p\sqrt{:\frac{4}{9}+\frac{p}{L}}$. Item ut t s $= \frac{2}{3}p$, ad o s: ſic b o = t t $= A$, ad o c $= \frac{3}{2}A\sqrt{:\frac{4}{9}+\frac{p}{L}} = A\sqrt{\frac{L+\frac{9}{4}p}{L}}$. Ergo, ut omnes A, ad om-

nes

nes $A\sqrt{\frac{L+\frac{9}{4}p}{L}}$; hoc est, ut omnes $\sqrt{L}$, ad omnes $\sqrt{:L+\frac{9}{4}p}$. hoc est, ut omnes L, ad omnes $\sqrt{:L^2+\frac{9}{4}pL}$: sic A T recta, ad curvam A O. Hoc est, ut parallelogrammum cujus latitudo L, altitudo P = A T: ad truncum parabolæ æquealtum, cujus latus rectum $\frac{9}{4}L$, ordinatim-applicata minima L, adeoque altitudo abscissa $\frac{4}{9}L$. Quæ quidem cum supra traditis convenire, qui examinaverit, deprehendet. (Notandum interim L quo hic designatur latus rectum paraboloidis Semicubicalis, illic designari latus rectum Parabolæ, unde Paraboloides illa originem ducit.) Atque hinc etiam conoidis superficies simili modo colligitur, atque illic; ut non sit opus repetere.

Paraboloidum aliarum Curvæ. Idem similiter in aliis non paucis Paraboloidum generibus obtinebitur. Verbi gratia. Sunto ordinatim-applicatæ d o = A t, in diametrorum ratione *subquintuplicata quadruplicata.* Et propterea d f ad d A, ut 5 ad 4: & t s ad t A, ut 4 ad 5. Sumptis A t, A t, arithmetice proportionalibus, quæ dicantur p, earumque communis excessus A = t t, diameter d A = d = $\sqrt[4]{\frac{p^5}{L}} = p\sqrt[4]{\frac{p}{L}}$. Erit tangens o s = $\sqrt{:\frac{16}{25}p^2+p^2\sqrt{\frac{p}{L}}}: = p\sqrt{:\frac{16}{25}+\sqrt{\frac{p}{L}}}:$ Item, ut t s = $\frac{4}{5}p$, ad o s: sic b o = t t = A, ad o c = $A\sqrt{:1+\frac{25}{16}\sqrt{\frac{p}{L}}}$. Ergo, ut omnes A, ad omnes $A\sqrt{:1+\frac{25}{16}\sqrt{\frac{p}{L}}}:$ hoc est, ut totidem L, ad totidem $\sqrt{:L^2+\frac{25}{16}L\sqrt{pL}}$: sic A T recta, ad curvam A O. Nempe, ut Parallelogrammum, ad figuræ truncum, cujus ordinatim-applicatæ sint $\sqrt{:L^2+\frac{25}{16}L\sqrt{pL}}$. Similiter: Si essent ordinatim-applicatæ in diametrorum ratione *subseptuplicatæ sextuplicata*, aut *subnoncuplicata octuplicata*, &c. in infinitum: Quas omnes pariter εὐθυνσεως capaces recte asserit Heuratius. (Hæ autem omnes, à Paraboloide Biquadraticali, Bicubicali, Triquadraticali, cæterisque quarum potestates à numero pari denominantur, eodem planè modo derivantur,

rivantur, quo supra, ab ipsa Parabola, Semicubicalis: Si enim intelligatur A p P fig. 25. Paraboloides Biquadraticalis, vel Bicubicalis, *&c*, adeoque d p, ut $\sqrt{^4}\ d L^3, \sqrt{^6}\ d L^5$, *&c*; erit de, ut $d \sqrt{^4}\ d L^3, d \sqrt{^6}\ d L^5$, *&c*, hoc est, ut $\sqrt{^4} \frac{d^5}{L}, \sqrt{^6} \frac{d^7}{L}$ *&c*.

εὐθυάπτως autem eas capaces,(ne gratis dictum videatur) paucis ostendemus. Ponamus autem (quia generatim agendum est) n numerum potestatum quemvis,& $m = n + 1, i = n - 1$,& $s = \frac{1}{2}$. & $n = 2\ i$. Esto autem curva rectificanda A O (fig. 28. vel 36.) parabola vel paraboloides quævis quæ ita constituatur ut d o vel A t sit $p = \sqrt{m}\ d^n L$, adeoque A d vel t o, $d = \sqrt{n}\ \frac{p^m}{L} = \frac{p}{\sqrt{}} \sqrt{^n}\ pLi$: Ponamus item (quo factiones vitentur) ut n ad m, sic K ad L. Invenietur, eodem processu quo nuper, fig.36 (propter d A ad d f, sive t s ad t A, ut n ad m; quod universaliter demonstravimus ad prop.23.46.49.*Con.Sect.*) t t,ad o o vel o c, ut K ad $\sqrt{}: K^2 + \sqrt{^s}\ p\ Li$: Adeoque, si ponatur fig. 28. A K $= K$, & t $\varkappa = \sqrt{}: K^2 + \sqrt{^s}\ p\ Li$: Erit ut T A K rectangulum, ad T A K $\varkappa$ quadrilineum; sic recta A T, ad A O curvam. Atque hoc quidem universaliter, sive sit n numerus par, sive impar, sive etiam fractus.

Quoties autem n est numerus par; trilineum K $\varkappa$ δ, (adeoque T A K $\varkappa$ quadrilineum,) quadrari posse (adeoque & A O rectificari) sic ostendimus.

Ponamus K δ quotlibet æqualiter crescentes, quæ sigillatim dicantur a (quarum maxima sit Δ:) quibus respondeant totidem $\delta\ \varkappa$ trilineum K $\varkappa$ δ complentes. Est autem a ($=$ t $\varkappa$ $-$ A K) $= \sqrt{}: K^2 + \sqrt{^s} p\ Li : - K$; adeoque $a + K = \sqrt{}: K^2 + \sqrt{^s}\ p\ Li$: Et $a^2 + 2\ a\ K + K^2 = K^2 + \sqrt{^s}\ p\ Li$; & $a^2 + 2\ a\ K = \sqrt{^s}\ p\ Li$; Cujus æquationis utraque pars multiplicata secundum exigentiam potestatis s, dat $S: a^2 + 2\ a\ K: = p\ Li$: adeoque $\frac{S: a^2 + 2\ a\ K:}{Li} = p = $ A t $=$ $\delta\ \varkappa$, quæ omnes complent K $\varkappa$ δ trilinium: quod itaque (quantacunque sit potestas S numero integro designanda) quadrari poterit. Ergo *&c*.

Exempli gratia. Si $S = 2$ (quadratum designans) adeoque $n = 4$, $i = 3$, & $K = \frac{4}{2}L$: erit $\frac{S: a^2 + 2aK:}{Li} = \frac{a^4 + 4a^3K + 4a^2K^2}{L^3}$: Adeoque Trilineum ad circumscriptum Parallelogrammum; ut $\frac{1\,\Delta^4}{5\,L^3} + \frac{4\,\Delta^3\,K}{4\,L^3} + \frac{4\,\Delta^2\,K^2}{3\,L^3}$, ad $AT = \sqrt{}^5\, D\,L^4$; sive, ut $\frac{4}{5}\Delta^4 + \Delta^3 K + \frac{4}{3}\Delta^2 K^2$, ad $L^3 \sqrt{}^5\, D\,L^4$.

Si $S = 3$, adeoque $n = 6$, & $i = 5$, & $K = \frac{6}{5}L$: Erit $S: a^2 + 2aK: = a^6 + 6a^5K + 12a^4K^2 + 8a^3K^3$: Adeoque Trilineum ad circumscriptum Parallelogrammum ut $\frac{1}{7}\Delta^6 + \Delta^5 K + \frac{12}{5}\Delta^4 K^2 + 2\Delta^3 K^3$, ad $L^5 \sqrt{}^7\, D\,L^6$. Et in reliquis similiter.

Sin $n = 2$, adeoque tum S, tum i, $= 1$, potestatem primam designans, multiplicatione opus non erit; (cum ipsa quantitas exposita, ejusque potestas prima tantundem sunt:) sunt itaque omnes p (trilineum complentes,) omnibus $a^2 + 2aK$ sigillatim proportionales, hoc est, ut quadrata ordinatim-applicatarum in hyperbola; sive, ut ipsæ rectæ (diametro parallelæ) in complemento trunci parabolici, (quod nempe cum ipso trunco complet circumscriptum parallelogrammum;) quæ quidem rectæ, quadratis ordinatim-applicatarum in hyperbola sunt proportionales.

Quoties vero n est numerus impar; adeoq; s numero integro nō assignabilis: Pro $\frac{S: a^2 + 2aK:}{Li} = p$, sistendum erit in $\frac{N: a^2 + 2aK}{Lu} = p^2$. Quæ casu, licet K x δ quadraturæ capax non sit, adeoque nec A O. εὐθύνσεως: Est tamen Conoides, istius conversione circa K δ, magnitudinis notæ; adeoque & complanari poterit superficies curva conoidis quæ rectâ A O circa A D describitur. Sed non & exinde, propterea, exhibebitur etiam semisuperficiei Conoidicæ momentum respectu axis. Quoties vero n est numerus par; poterunt ea omnia exhiberi. Atque de his hactenus.

Denique, ut totum hoc de paraboloidibus negotium simul & semel absolvam. Sit n numerus quilibet, $m = n + x$, $i = n - x$, sitque $z = 2x$, & $u = 2i$: designet autem ipsius n ad m respectus, quota potestas diametri quotæ ordinatim applicatæ potestati propor-

proportionalis sit. Habebitur $\frac{N : a^2 + 2aK}{Lu} := p^z$. Adeoque aggregatum omnium p^z exhiberi poterit; ut & omnium potestatum ipsius p, quæ denominantur à numeri z multiplici. Si vero insuper n & z numeri, communem aliquem divisorem admittant, puta f; sitque $f)\, N\, (S$, & $f)\, z\, (e$. Exhibebitur etiam omnium p^e aggregatum, ut & potestatum ipsius p quæ à numeri e multiplo denominantur. Atque hinc dijudicandum erit, quatenus vel ipsa A O curva, vel conoidis superficies ab hac descripta, aut hujus semisuperficiei momentum respectu axis, aliave hujusmodi, exhiberi possint vel non possint. Atque de Paraboloidibus hactenus.

Tandem, Coronidis loco, ipsam Cycloidis curvam ad examen revocabimus. Notum est Cycloidis tangentes ZT, subtensis Circuli Genitoris z C, parallelas esse, & æquales; Adeoque & earum particulas ZI, ipsis z s. Quæ quidem tangentium particulæ (in partibus exiguis) ipsis Z Z Cycloidis particulis (ob rationes supra insinuatas) coincidere censendæ sunt. Divisâ autem C F in partes æquales quotlibet in punctis Y, quæ dicantur $A =$ YY; unde fiant C Y arithmetice-proportionales, quæ dicantur d, totaque C F $= D$: Erunt ubique z C $= \sqrt{dD}$. Item, ut CY $= d$, ad z C $= \sqrt{dD}$; sic Y Y vel A, ad z s $=$ Z I $= \frac{A\sqrt{dD}}{d} = A\sqrt{\frac{D}{d}}$. Adeoque, omnes $\mathcal{A}$, ad omnes $A\sqrt{\frac{D}{d}}$ vel $\frac{A\sqrt{D}}{\sqrt{d}}$; hoc est, C F recta, ad curvam C Z A; ut series Æqualium, ad seriem Reciprocam subsecundanorum. Hoc est (per prop. 87. & seqq. Arith. Infin.) ut C F B rectangulum, ad congruam figuram interminabilem C F E $\beta\, \delta$ C: (& partes partibus respective proportionales.) Hoc est (per prop. 102. Arith. Infin.) ut 2 ad 1. Et propterea C Z A semicycloidis curva, diametri genitoris circuli C F, dupla.

Curva Cycloidis.

Fig. 37.

(Habentur autem ipsæ Y β, si intelligantur tum semiparabola (cujus vertex C, axis C F, & basis axi æqualis, adeoque & lateri recto,) tum huic circumscriptum quadratum; & fiat, ut rectæ in parabola, ad rectas in quadrato; (hoc est, ut $\sqrt{d\mathcal{D}}$, ad D;) sic

F B, vel A, ad quartam; erit ea Y $\beta = \frac{A D}{\sqrt{d D}} = A \sqrt{\frac{D}{d}}$. Vel etiam, si intelligatur eadem parabola inverse posita, (verticem habens F, axem, basin, & latus rectum, $= D$,) & sumatur ut ordinatim-applicata in semicirculo, ad ordinatim-applicatam in parabola; hoc est ut $\sqrt{:dD - d^2}$: ad $\sqrt{:D - d}$, in $D: = \sqrt{:D^2 - dD}$: sic F B, vel A, ad Y β vel $A \sqrt{\frac{D^2 - dD}{dD - d^2}} = A \sqrt{\frac{D}{d}}$. Utrovis modo eadem prodibit Y β recta.)

Porro; Ductis tum ipsis A, tum $\frac{A \sqrt{D}}{\sqrt{d}}$, in $d = $ C Y, (distantiam à vertice,) habetur ratio momentorum respectu rectæ C T tangentis in vertice; nempe ut omnes dA, ad totidem $A \sqrt{dD}$; series primanorum, ad seriem subsecundanorum; hoc est (per prop. 64. Arith. Infin.) ut $\frac{1}{2}$, ad $\frac{2}{3}$; vel 3 ad 4. Quæ eadem est & ratio Circuli radio C F descripti, ad superficiem curvâ C Z A circa C T descriptam.

Deinde; propter linearum rectæ & curvæ magnitudines, ut 1 ad 2; & momenta ut 3 ad 4; Erit, propter $\frac{1}{2} : \frac{3}{4} (\frac{3}{2}$, distantia centrorum gravitatis à C T, ut 3 ad 2; adeoque curvæ centrum gravitatis distat $\frac{2}{3}$ radii, hoc est $\frac{1}{3}$ diametri, à C T; adeoque $\frac{4}{3}$ radii, vel $\frac{2}{3}$ diametri ab F A.

Et consequenter; (propter centrorum distantias ut 3 ad 4, & magnitudines linearum ut 1 ad 2;) circulus radio F C descriptus, ad superficiem curva C Z A circa A F descriptam, ut 3 ad 8.

Quod ipsum similiter colligitur, ductis tum A, tum $A \sqrt{\frac{D}{d}}$, in $D - d$ distantiam ab F A. Erunt utique momenta, ut $AD - dA$, ad $\frac{A \sqrt{D}}{\sqrt{d}}$ in $D - d$, vel $\frac{A D \sqrt{D} - A d \sqrt{D}}{\sqrt{d}}$ vel $\frac{AD \sqrt{D}}{\sqrt{d}} - A \sqrt{dD}$: Adeoque, ut $1 - \frac{1}{2}$, ad $2 - \frac{2}{3}$; Hoc est, ut 3 ad 8.

Similiter de centris gravitatum semisuperficierum tum circa C T, tum circa F A, constabit. Ductis nempe superficiebus, tum rectis Y Y, tum curvis Z Z, descriptis, in distantias suas, sive ab à C T, sive ab AF; habetur ratio momenti semisuperficiei curvæ,

ad

ad momentum semicirculi. Reliquaque facilius quam ut iis opus sit insistere.

Nempe, ductis tum $d A$, tum $A \surd d D$, in d; reperitur momentum (respectu rectæ C T) Semicirculi, ad momentum semisuperficiei curvæ circa eandem C T; ut series $d^2 A$, ad seriem $A d \surd d D$; hoc est, ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{2}{5}$, sive ut 5 ad 6.

Item, ductis tum $A D - d A$, tum $\frac{A D \surd D}{\surd d} - A \surd d D$, in $D - d$. Habetur ratio momenti (respectu rectæ A F) semicirculi, ad momentum semisuperficiei curvæ, circa eandem A F; ut series $A D^2 - 2 d A D + d^2 A$, ad seriem $\frac{A D^2 \surd D}{\surd d} - 2 A D \surd d D + A d \surd d D$. Hoc est, ut $1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3}$, ad $2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5}$. Hoc est, ut 5 ad 16.

Habitis autem, tum magnitudinum, tum momentorum rationibus, & unius centro gravitatis; distantia centri gravitatis alterius non latebit.

Sed & de partibus similiter instituetur judicium. Diviso utiq; quadrilineo interminabili in ratione datâ (quod per nost. *Arith. Infin.* facile fiet,) dividitur & CZA curva in eadem ratione. Nempe, sumptâ C Y ad C F, in ratione p^2: ad P^2. erit tum C Y β δ ad C F B β δ, tum C Z ad C Z A, in ratione p ad P. (Et consequenter, sumptis C Y, C Y, *&c.* quotlibet, in duplicata ratione arithmetice proportionalium; erunt correspondentes C Z, C Z, *&c*, arithmetice proportionales, ipsaque C Z A, in æquales partes in punctis Z divisa.) Distat autem à T C δ rectâ verticis, sive C Y β δ figuræ, sive C Z curvæ, centrum gravitatis, $\frac{1}{3}$ (parte tertia) rectæ C Y: per regulam generalem quam *Epistolæ* 16 *Commercii Epistolici* subjecimus.) Unde reliqua facile investigantur.

Vides itaque quam facile fluant horum Problematum solutiones.

Si vero ad Cycloides Protractas aut Contractas libeat procedere; etiam sic res non infeliciter succedet. Esto enim, eodem C z F circulo genitore, semicyclois, sive contracta, sive protracta, *Cycloides secundariæ.*

$\alpha\zeta$ C; cujus basis α F æquet semiperipheriam $\varphi\kappa$, (majorem in protracta, minorem in contracta;) ducantur F z, φ z, rectæ, eisque ad rectos angulos z C, z t. His autem parallelas esse Z I, $\zeta\iota$, Cycloidum tangentes; ex Torricellio, Schotenio, aliisque notum est. Adeoque (protracta proxima Y z per puncta s, σ, I, ι,) erunt Z I, $\zeta\iota$, ipsis z s, z σ, æquales.

Divisa jam, ut prius, C F in partes quotlibet æquales in punctis Y; positisque C F $= D$, F Y $= D - d = a$; erit Y z $=$ $\sqrt{: aD - a^2}$: quæ dicatur s: & propter F Y, ad Y z, ut Y z ad Y C, erit Y C $= \frac{s^2}{a}$; adeoque z C $= \sqrt{: \frac{s^4}{a^2} + s^2 :} = \sqrt{\frac{s^4 + s^2 a^2}{a^2}}$ $= \frac{s}{a}\sqrt{: s^2 + a^2}$. Item, ut Y C, ad z C; sic Y Y $= A$, ad z s $=$ $\frac{A\sqrt{: s^2 + a^2}}{s}$.

Ponamus deinde, φ Y $= \alpha$. Adeoque, propter φ z t angulum rectum, ut φ Y $= \alpha$, ad Y z $= s$; sic Y z, ad Y t $= \frac{s^2}{\alpha}$: & z t $= \sqrt{:}$ $\frac{s^4}{\alpha^2} + s^2 : = \frac{s}{\alpha}\sqrt{: s^2 + \alpha^2}$. Item, ut Y t ad z t, sic Y Y $= A$, ad z $\sigma = \frac{A\sqrt{: s^2 + \alpha^2}}{s}$.

Et consequenter, ut $\sqrt{: s^2 + a^2}$: ad $\sqrt{: s^2 + \alpha^2}$: (hoc est, ut F z ad φ z;) singulæ z s vel Z I, ad singulas z σ vel $\zeta\iota$. Et, si sic fiat ubique, Y β ad aliam; erit, ut C F B rectangulum ad figuram sic constructam, sic C F ad curvam semicycloidis secundariæ, (sive protractæ sive contractæ;) & partes partibus respective proportionales.

Fatendum interim est, figuram, sic constructam, non magis quadraturæ capacem esse, quam est ellipsis curvæ capax εὐθυνσεως.

Sin libeat paulo adhuc explicatius rem efferre; ponamus F $\varphi = B$, adeoque $\alpha = a \pm B$, & $\alpha^2 = a^2 \pm 2aB + B^2$; Ideoque (propter $s = \sqrt{: aD - a^2}$:) erit $s^2 + \alpha^2 = aD \pm 2aB + B^2$; & $\frac{A\sqrt{: s^2 + \alpha^2}}{s} = \sqrt{\frac{aD \pm 2aB + B^2}{aD - a^2}}$. Sunt autem omnes aD

±

$\pm 2aB + B^2$ quadrata ordinatim applicatarum in parabolæ trunco cujus altitudo $D = FC$: latus rectum parabolæ, $D \pm 2B = \varphi\kappa$; ordinatim applicata infima & minima, B; adeoque altitudo abscissa $\frac{B^2}{D \pm 2B}$. Si igitur fiat ubique, ut Y z $= \sqrt{:aD - a^2}$: ordinatim- applicata in semicirculo, ad $\sqrt{:aD \pm 2aB + B^2}$: ordinatim-applicatam in hoc trunco parabolæ; sic A vel F F, ad quartã, quæ itaq; est $A\sqrt{\frac{aD \pm 2aB + B^2}{aD - a^2}}$: Quæ ex hisce quartis conflatur figura, ea est quam diximus ad C F B parallelogrammum sic esse, ut est curva semicycloidis protractæ contractævc ad C F circuli genitoris diametrum; & partes partibus respective proportionales,

Hoc igitur interest inter curvam Cycloidis primariæ, & secundariæ; quod faciendum est, Ut ordinatim-applicatæ in semicirculo; ad ordinatim-applicatas, illic, in parabola; hic, in parabolæ trunco: sic data recta; ad quartas.

Si vero libeat curvæ cycloidis secundariæ particulas comparare, non ad axis C F partes æquales, sed ad æquales partes curvæ cycloidis primariæ: dividenda erit C Z A curva in partes quotlibet æquales in punctis Z; adeoque C F inæqualiter in punctis Y; puta (sumptis p arithmetice-proportionalibus, quarum maxima $P = D$,) CY $= \frac{p^2}{D}$; Et Y Y, ut 1, 3, 5, &c. arithmetice proportionales, quæ omnes æquent ipsam C F, dicantur autem y. Positis igitur ubique $D - \frac{p^2}{D}$, pro $a = D - d = $ F Y; & y, pro A; (& congrua reductione factâ:) Pro $A\sqrt{\frac{aD \pm 2aB + B^2}{aD - a^2}}$ prodibit $\frac{y}{p} B \sqrt{: \frac{D^2}{D^2 - p^2} + \frac{D^2 \pm 2BD}{B^2}}$: (ejusdem plane formæ cum A $\sqrt{: \frac{R^2}{R^2 - a^2} + \frac{H^2}{R^2}}$: qua quadratis Ellipseos particulas, earumve subtensas, æqualibus semiaxis longioris partibus respondentes,

dentes, designandas supra docuimus:) Unde liquet, curvæ semicycloidis secundariæ particulas, primariæ partibus æqualibus respondentes, esse ut particulas curvæ quadrantis Ellipseos respondentes longiori semiaxis partibus æqualibus; Ellipseos, inquam, cujus semiaxis minor, est $D = CF$; & $D\sqrt{\frac{D^2 \pm 2BD^2}{B^2}}$ distantia foci à centro; (cujus quadratum quadrato semiaxis minoris additum, dat quadratū semiaxis majoris;) adeoque $\frac{D \pm B}{B} D$ semiaxis major; (nempe, si fiat, ut $F\varphi = B$, ad $\varphi C = D \pm B$; sic $FC = D$, ad quartam; erit hæc quarta, semiaxis major:) Quod ex supra traditis patet.

Hujus autem quadrantis Ellipseos particulis, quibus particulas semicycloidis secundariæ diximus proportionales, non tamen æquales dicimus, (adeoque nec totam toti;) sunt utique ad illas, ut $\frac{y}{p} B$, ad A (partem aliquotam ipsius $D = FC$:) ut ex jam traditis patet: Hoc est, ut $\frac{2A}{D} B$ ad A; (est enim y ad p, ut $2A$ ad D, quod mox ostendetur:) sive ut $2B$ ad D. Adeoque si fiat quadrans ellipseos cujus conjugati axes, ad axes conjugatos ellipseos modo dictæ, sint ut $2B$ ad D: (hoc est cujus semiaxis minor sit $2B = 2F\varphi$; major $2D \pm 2B = FC + \varphi x$:) Erit quadrans ille, curvæ semicycloidis secundariæ, æqualis; & partes partibus respectivæ. Quæ Wrennii nostri traditis comparata, invenio convenire.

Quod autem y ad p, sit ut $2A$ ad D; sic, si opus est, probabitur. Omnes p (tot numero quot in D supponuntur partes æquales A) sunt series arithmetice proportionalium quarū maxima D; cujus semissis (propter terminum minimū infinite exiguum) ductus in numerum terminorum $\frac{D}{A}$, exhibet $\frac{D^2}{2A}$, omnium summam. Sunt autem omnes y arithmetice proportionales, & quidem totidem numero, quarum item terminus primus est infinite exiguus; omnium vero summa est ipsa D. Adeoque (cum utraque sit progressio arithmetica, ab infinite exiguis inchoata) erunt tum

omnes

omnes *y* ad omnes *p*, tum ad singulas singulæ, ut *D* ad $\frac{D}{2A}$, hæc est, ut 2 *A* ad *D*. Quod dictum erat.

Atque hæc sunt, Vir Nobilissime, methodi nostræ, curvas & rectas comparandi, (adeoque tum Lineas *Rectificandi*, tum *Complanandi* Superficies *Curvas*,) aliquot specimina; cujus, ut vides, examini, tum tuorum quædam, tum & aliorum nupera inventa subjeci. Putâram alia quædam addidisse; sed ne in volumen exeat Epistola, prospiciendum est.

Methodum, quam memoras, *de Maximis & minimis*, ejusque ad Tangentes utilitatem: vide an non & apud nos, utut nominis ignaros, istius passim exstent specimina; tum *Con. Sect. prop.* 23. 27. 28. 30. 36. 39. 46. 49. *&c.* tum de *Angulo contactûs* aliquoties; sic *Operis Arithmetici* pag. 199. 200. tum alibi sæpe. Quod autem tu de hac re commentus es, si placeat proferre, non dubito quin Mathematicis gratum sit futurum, ut tua solent esse omnia.

Item *Elementa Conica seorsum à Cono*, nos etiam tradidimus, uti nosti, in meo *De Conicis Sectionibus* tractatu, parte saltem posteriori. Sed non eò minus gratum erit, *D. de Witt*, quod memoras proditurum opus.

Horologium tuum ingeniosissimum; & felicissimum *De Saturni facie* Systema, (de quibus antehac ad te scripsimus;) intacta jam prætereo.

Superest, ut tædio, quo te hactenus detinui, tandem liberem. Valeas interim, oro, nobisque faveas, & amare pergas.

FINIS.

R

Pag. 23. *l.* 20. § 68. *post* subjiciuntur, *Adde*

Figuræ in superficie Sphærica. Et quidem, suppositâ circuli quadraturâ; quæ hic supponitur, quadrabitur Figura quælibet in superficie Sphæræ circulorum quorumvis (sive maximorum sive minorum) arcubus terminata. Quod quamvis non sit hujus loci fusius prosequi, paucis tamen ostendam. Nam 1. Posse figuram hanc quamcunque in Trilinea Sphærica circulorum peripheriis dirimi, manifestum est. 2. Trilinea hæc si sint vera Sphærica Triangula (circulorum maximorum arcubus terminata) data sunt: Quippe, ut Excessus quo angulorum in Triangulo Sphærico aggregatum superat duos rectos, ad duos rectos; sic Triangulum illud, ad Circulum in Sphæra maximum. 3. Siquod vero Trilineorum non sit tale Triangulum Sphæricum; habetur tamen illius à Sphærico Triangulo, iisdem punctis angularibus terminato, differentia, habitis Bilineis quæ circulorum maximi & minoris arcubus conterminis interjiciuntur. 4. Habetur autē hujusmodi Bilineū, si intelligantur ab extremis arcûs circuli minoris ad polum suum duci duos arcus circuli maximi: Qui, cum arcu illo circuli minoris, continebunt Trilineum Isosceles, cujus magnitudinem hic (§ 68.) exhibemus; Iidemque, cum contermino arcu circuli maximi, continent Triangulum Sphæricum; Quorum differentia, est Bilineum quæsitum. Adeoque, *Suppositâ circuli quadraturâ, quadrabitur figura quælibet in superficie Sphæræ circulorum quorumvis arcubus terminata; non minus quam, in Plano, Figura rectilinea.* Quod nos, ni fallor, primi docemus.

Pag. 90. *l.* 20. *post* hactenus. *Adde*

Conchoides. Est autem & magna, inter Conchoidem & Cycloidem, convenientia. Resumptâ enim, quæ est *Epist.* 39. *Commercii Epistolici, p.* 167, figurâ; Manifestum est, rectam M D, Sinum esse anguli M C D, ad radium C A; & rectam M O, hoc est (propter parallelas) C H, ejusdem anguli Tangentem, ad radium P C. Ut igitur Ordinatim-applicata in *Cycloide*, est *Sinûs & Arcûs, ejusdem anguli, Aggregatum*, (ejusdem circuli, in Primariâ; sed, in Secundariis, diversorum:) Sic, in *Conchoide*, Ordinatim-applicata est *Aggregatum Sinus & Tangentis*, ejusdem anguli; (& quidem ejusdem circuli in Primariâ, *viz.* ubi PC = CA; sed diversorum in aliis:) Quod nos, quod sciam, primi detegimus. *Fig.* 38.

Conchoidis Solidum. Hinc autē porro colligimus, utut Conchoidis Planum OACH, infinite continuatum, infinitæ sit magnitudinis, esse tamen Solidum

dum hujus conversione circa axem CH genitum, magnitudinis finitæ. Quod utique sic converso quadrante ARC describitur, hemisphærium esse liquet. Quod autem reliquo RAO infinito describitur, æquatur Cylindro, cujus basis ARC quadrans, altitudo æqualis peripheriæ radio CP descriptæ. Quod sic probamus. Quoniam est ut CD ad DM, sic PC ad CH hoc est MO; erit ubique DM × PC = CD × MO; Hoc est, Factum ex DM in PC vel peripheriam hoc radio descriptam, æquale facto ex MO in CD seu peripheriam hoc radio descriptam: Ergo & omnia omnibus æqualia; hoc est, dictus Cylindrus, dicto solido conversione facto. Quod nos, credo, primi demonstramus.

Plani vero centrum gravitatis, nusquam est: utpote cujus distantia à CA intelligenda erit infinita, & à CH infinite exigua. Sed neque Solidi aut Semisolidi. Distat utique Semisolidi Centrum gravitatis, à CH, distantiâ finitâ, & facile assignabili; sed, à CA, distantiâ infinitâ. Hæc autem, & hisce gemina, fusius prosequi, non est hujus loci. *Centrum gravitatis.*

ERRATA

Preli admissa, quæ observavimus, alicujus momenti; partim calamo emendanda curavimus, partim sic emendet Lector, & siquæ alia deprehendet ipse.

PAg. 2. l. 5. Si super. p. 6. l. 15. centro. p. 11. l. 16. utravis. p. 14. l. 30. ducatur. p. 15. l. 7. ZY. p. 18. l. 34. sunt ut. p. 24. l. 16. gravitatis illud. p. 27. l. 11. radio. p. 41. l. 18. Trilinei. p. 43. l. 25. tum. p. 44. l. 14. peripheria. p. 45. l. 24. semiparabolæ. l. 25. semiperipheriarum. l. 27. sintque. l. 33, 35. semiconversione. p. 47. l. 23. ex. p. 48. l. 1. respectu. l. 13. trilinei. l. 20. utique. p. 52. l. 4. oblique. p. 57. & quindecim sequentes, numeris non suis notantur. p. (67. vel) 75. l. 24. (marg.) Fig. 18. p. (69. vel) 77. l. 5. GaAM. p. (71. vel) 79. l. ult. (bis) reliquarum. p. 106. l. 2. moneam. p. 113. l. 11. fractiones. l. 30. trilineum.

FIGURÆ

Ita sunt ad calcem suffigendæ, ut, quum explicantur, totæ extra libri oram conspiciantur.

Fig:1.

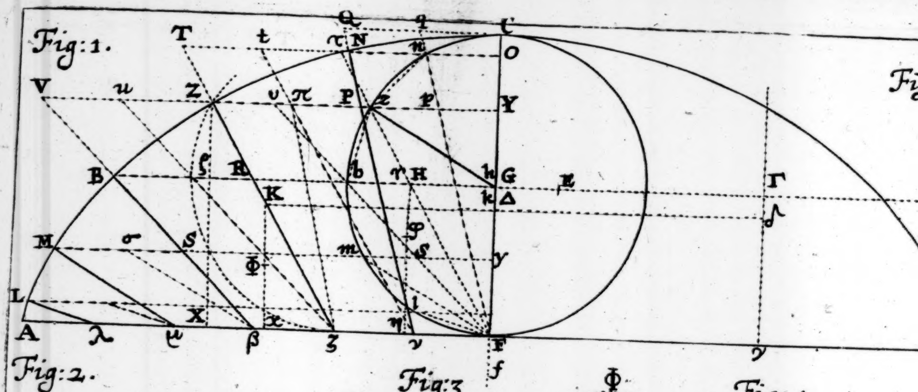


Fig:2.

Fig:3

Fig: 4

Fig: 8.

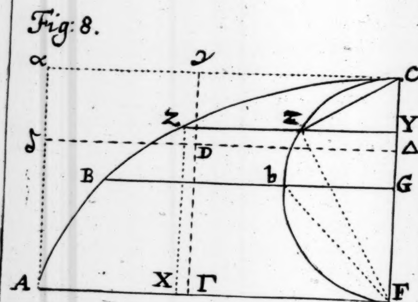


Fig:9.

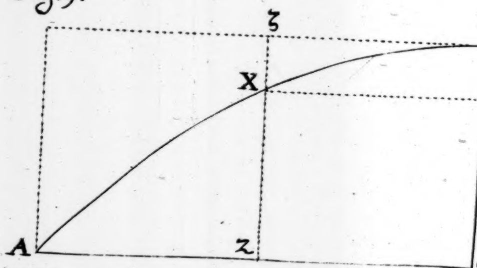
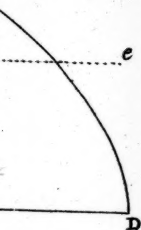
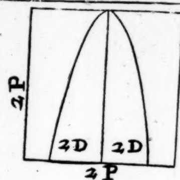


Fig: 12.





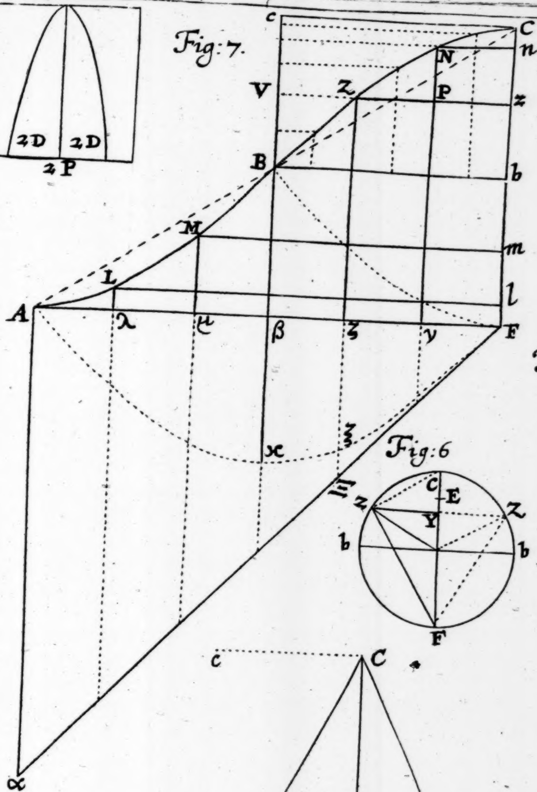


Fig: 7.

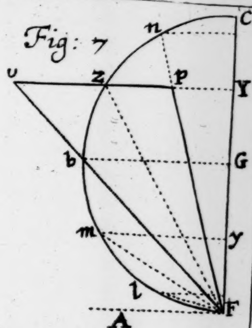
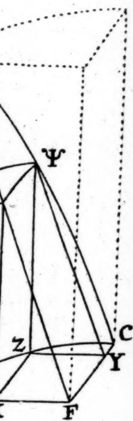


Fig: 7



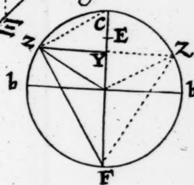


Fig: 6

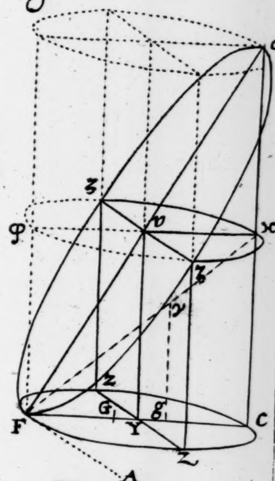
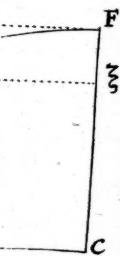


Fig: 5



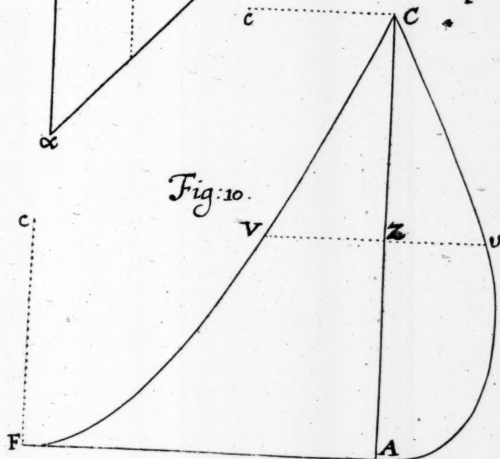


Fig: 10.

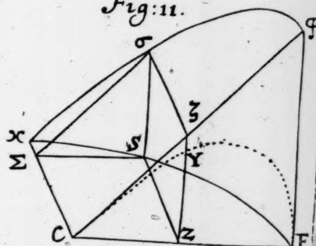


Fig: 11.

Fig : 13.

Fig : 14.

Fig : 20.

Fig : 21.

Fig :

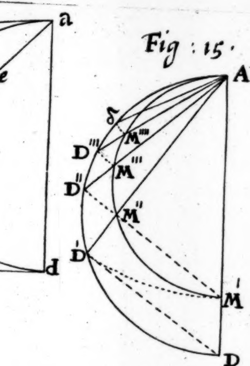


Fig: 15.

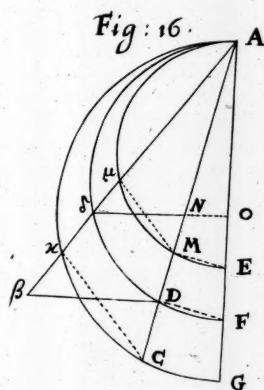


Fig: 16.

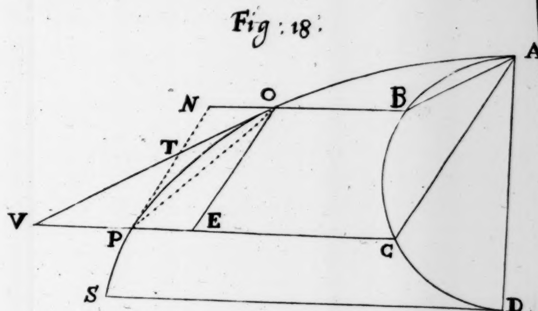


Fig: 18.

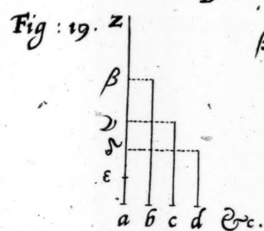
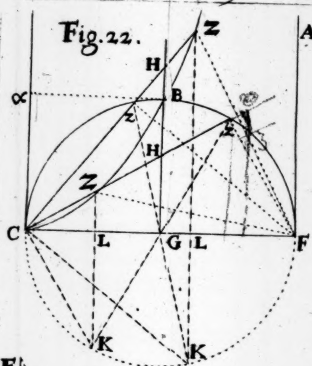
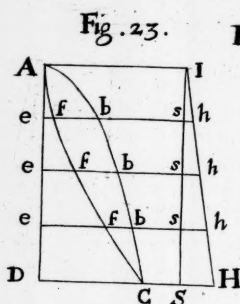


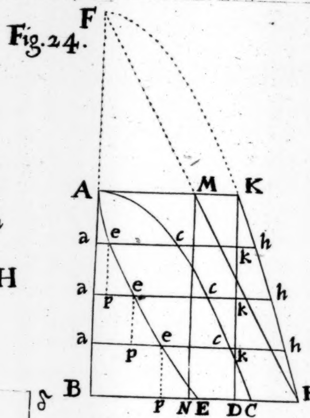
Fig: 19.

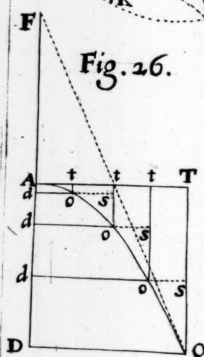
Fig: 17.

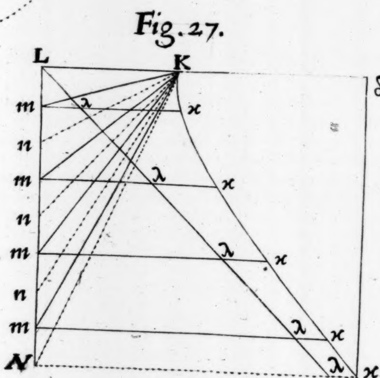
X

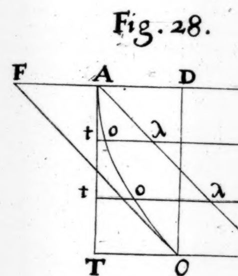

Fig.22.
Z
A
H
α
B
Z
H
Z
Z
C
L
G
L
F
K
K

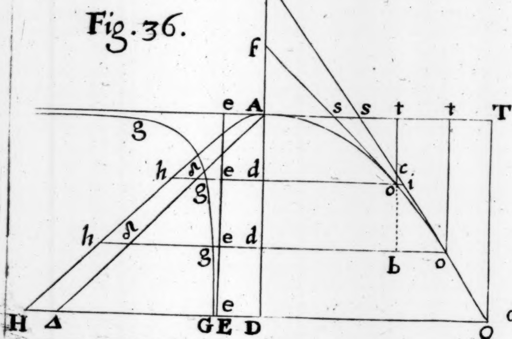

Fig.23.
A
I
e f b s h
e f b s h
e f b s h
D
C S
H

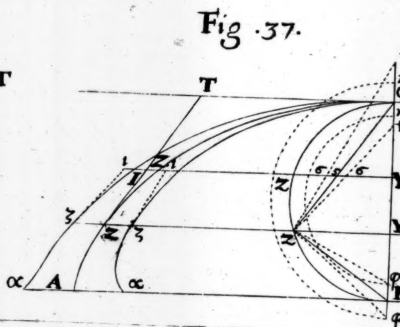

Fig.24.
F
A
M
K
a e c h
k
a p e c h
k
a e c k h
p
B
p N E D C


F
Fig.26.
A t t t T
d o s
d o s
d o s
D
O


Fig.27.
L
K
δ
m λ κ
n
n
m λ κ
n
m λ κ
n
m λ κ
N
λ κ


Fig.28.
F
A
D
t o λ
t o λ
T
O


Fig.36.
f
f
e A
s s t t T
g
h δ e d
g
c
o i
h δ
e d
g
b o
e
H Δ
G E D
O


Fig.37.
T
Z
I
Z
σ σ σ
ζ
Z ζ
Z
α A
α
φ
φ

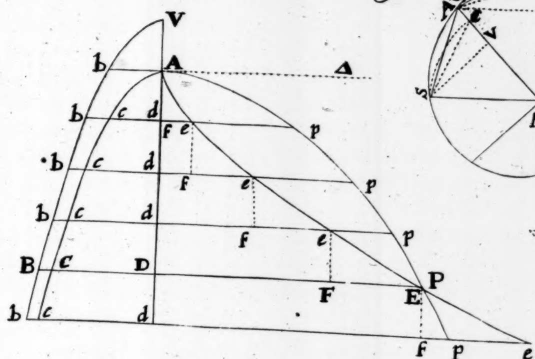


Fig. 25.

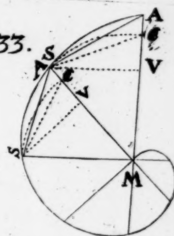


Fig. 33.

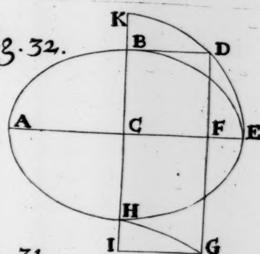


Fig. 32.

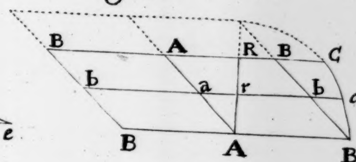
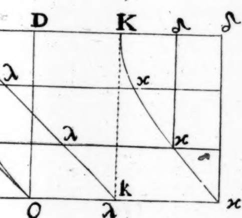


Fig. 31.



.28.

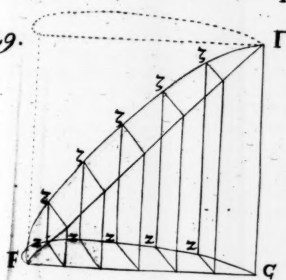


Fig. 29.

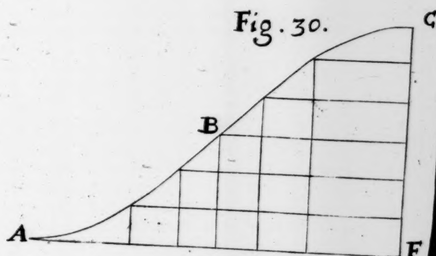


Fig. 30.

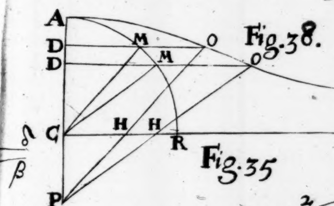


Fig. 38.

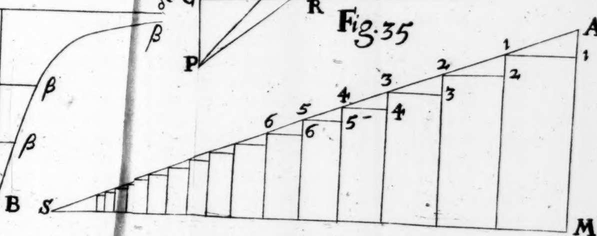


Fig. 35

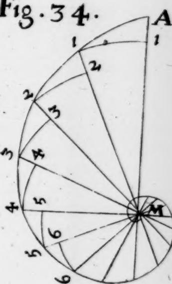


Fig. 34.